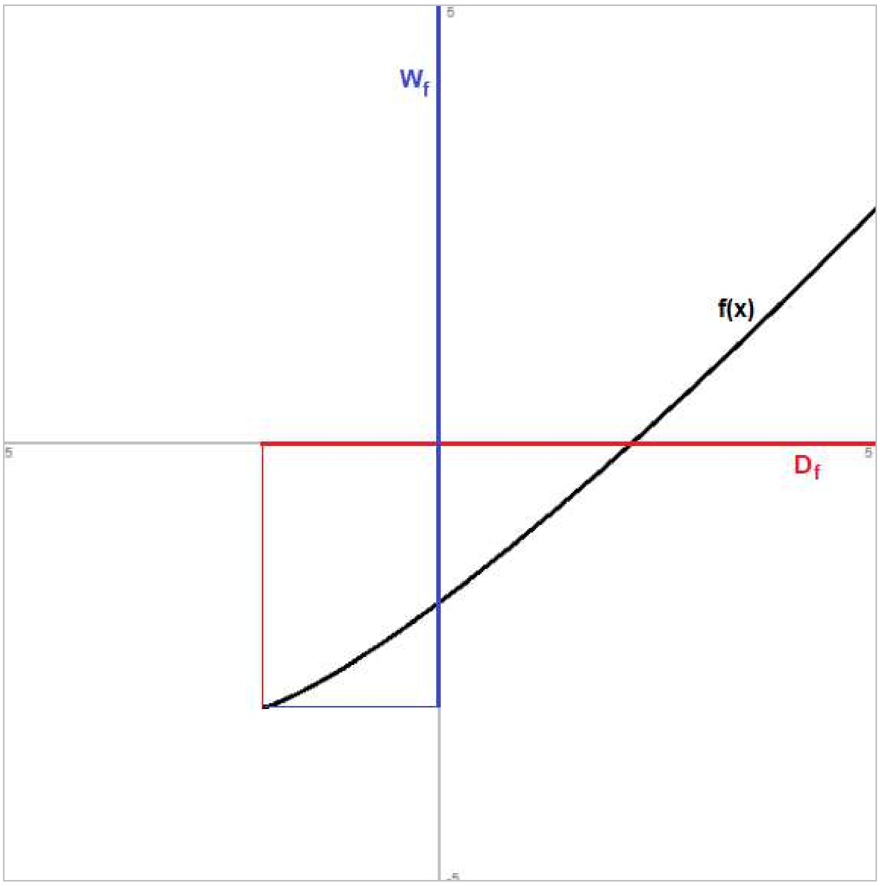
Michael Buhlmann

Mathematik > Analysis > Definitions-, Wertebereich

Funktion, Definitionsbereich, Wertebereich

Eine reellwertige Funktion f: D_f -> W_f ordnet jeder Stelle (Element) $x \varepsilon D_f \subset \mathbf{R}$ vermöge eines Funktionsterms f(x) genau eine reelle Zahl (Element) $y \varepsilon W_f \subset \mathbf{R}$ zu. Die Menge D_f heißt Definitionsbereich (Definitionsmenge, Urbildmenge, Argumentmenge) der Funktion f(x), u.a. verstanden als maximaler Definitionsbereich aller reellen x, für die der Funktionsterm f(x) definiert ist, so dass y = f(x) eine gültige reelle Zahl ergibt. Die Menge W_f als Menge aller y = f(x), die entstehen, wenn Stellen $x \varepsilon D_f$ in den Funktionsterm eingesetzt werden, heißt Wertebereich (Wertemenge, Bildmenge, Funktionswertmenge) der Funktion f(x). Funktionen y = f(x) lassen sich durch Kurven K als Menge von Punkten P(x|f(x)) mit $x \varepsilon D_f$ und $f(x)=y \varepsilon W_f$ in einem rechtwinkligen x-y-Koordinatensystem darstellen. Der Definitionsbereich D_f entspricht dann einer Teilmenge der reellen x-Achse, der Wertebereich W_f einer Teilmenge der reellen y-Achse des Koordinatensystems:

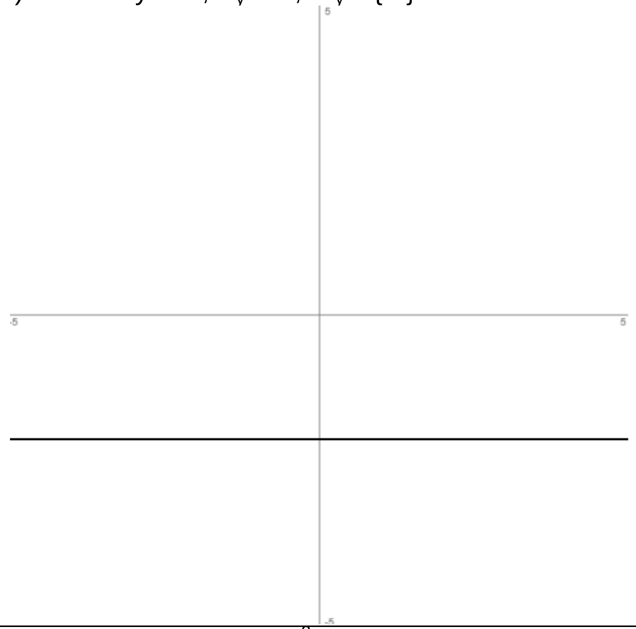


Funktion: $y = f(x) = 0{,}5 \cdot \sqrt[4]{(x+2)^5} - 3$,
Definitionsbereich: $D_f = [-2; \infty)$, **Wertebereich**. $W_f = [-3; \infty)$

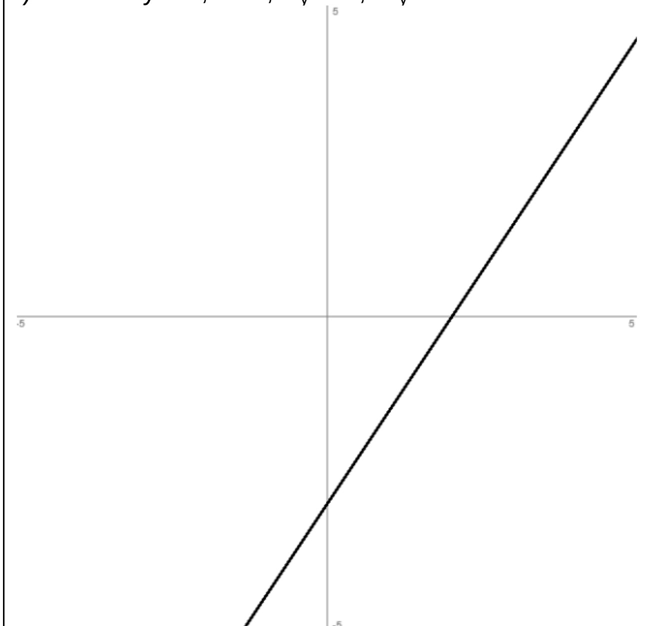
Ganz rationale Funktionen

Ganz rationale Funktionen sind Summen von mit reellen Zahlen multiplizierten Potenzen mit Exponenten als natürliche Zahlen oder 0, insbesondere Geraden y = mx+c, Parabeln $f(x) = ax^2+bx+c$ und Potenzfunktionen $f(x) = ax^n$ mit a, b, c, m als reelle, n als natürliche Zahlen. Der maximale Definitionsbereich ganz rationaler Funktionen f(x) ist immer: $D_f = \mathbf{R}$.
Beispiele:

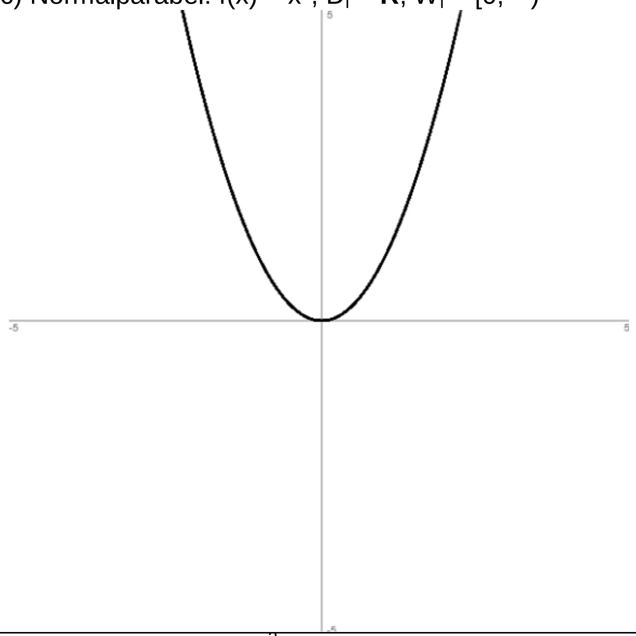
a) Gerade: $y = -2$, $D_y = \mathbf{R}$, $W_y = \{-2\}$



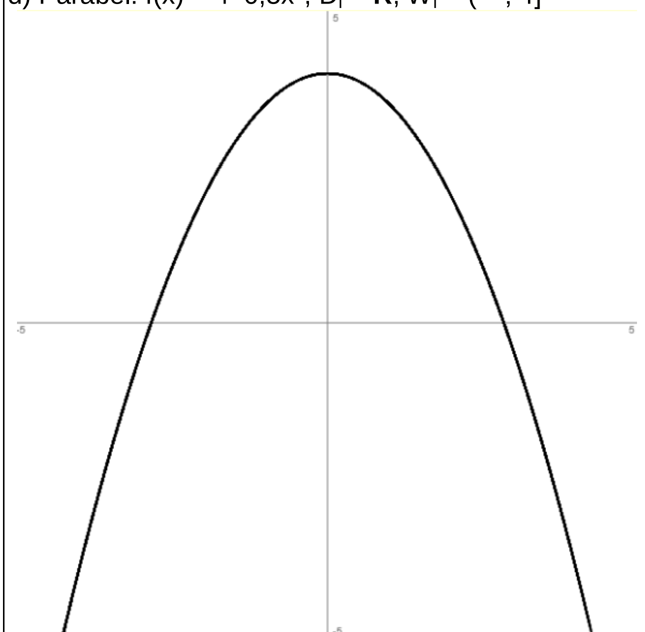
b) Gerade: $y = 1{,}5x-3$, $D_y = \mathbf{R}$, $W_y = \mathbf{R}$



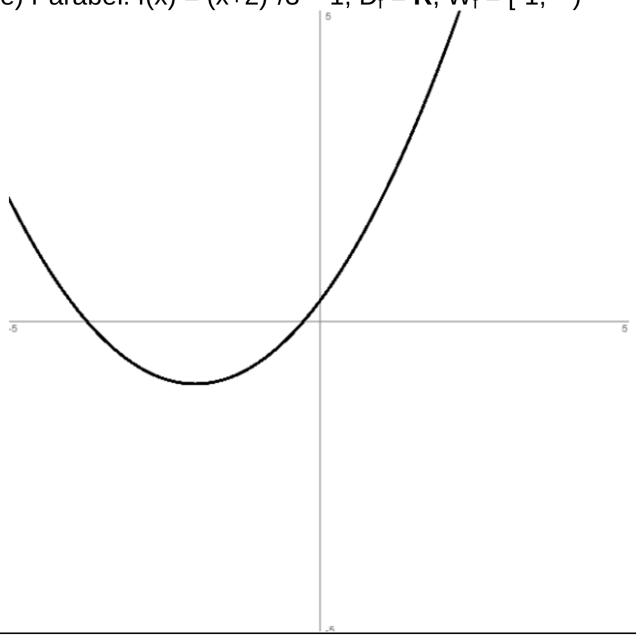
c) Normalparabel: $f(x) = x^2$, $D_f = \mathbf{R}$, $W_f = [0; \infty)$



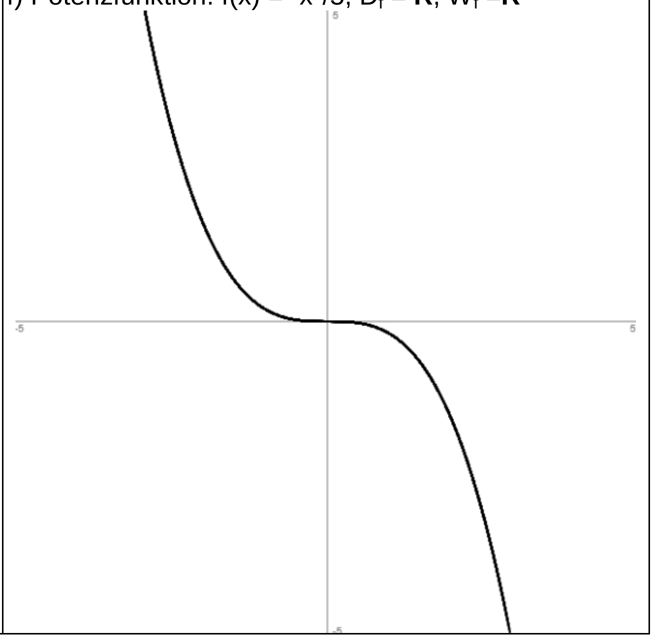
d) Parabel: $f(x) = 4-0{,}5x^2$, $D_f = \mathbf{R}$, $W_f = (-\infty; 4]$



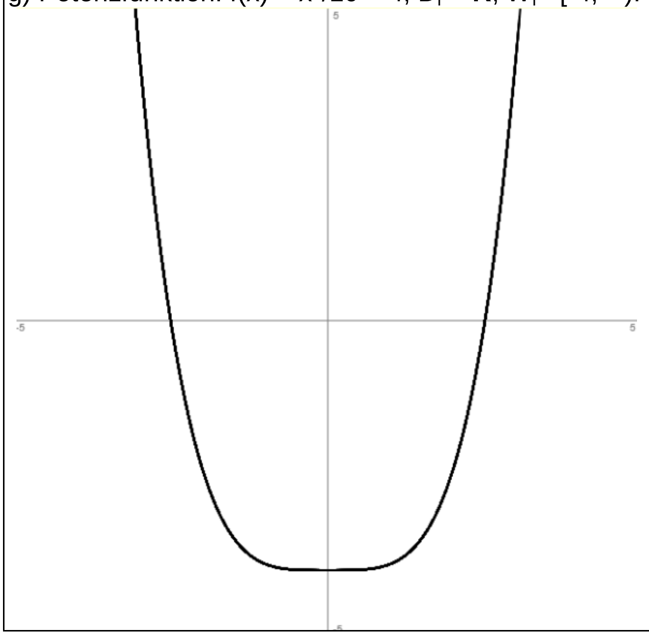
e) Parabel: $f(x) = (x+2)^2/3 - 1$, $D_f = \mathbf{R}$, $W_f = [-1; \infty)$



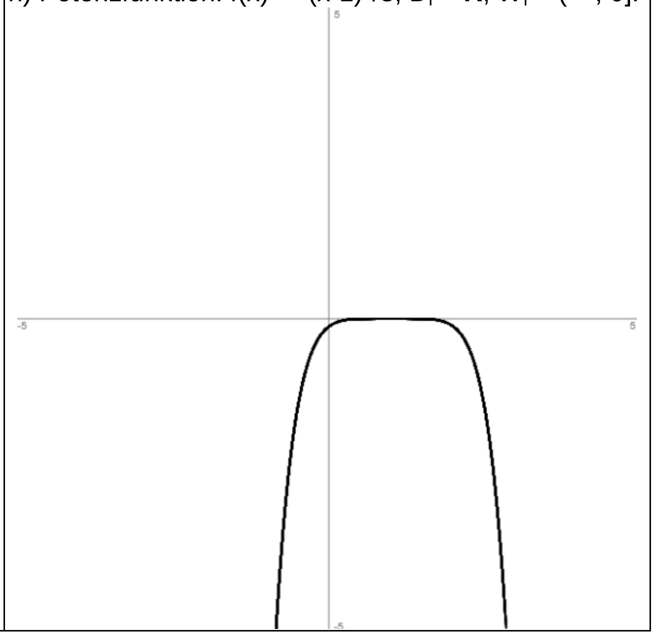
f) Potenzfunktion: $f(x) = -x^3/5$, $D_f = \mathbf{R}$, $W_f = \mathbf{R}$



g) Potenzfunktion: $f(x) = x^4/10 - 4$, $D_f = \mathbf{R}$, $W_f = [-4; \infty)$:



h) Potenzfunktion: $f(x) = -(x-1)^6/8$, $D_f = \mathbf{R}$, $W_f = (-\infty; 0]$:



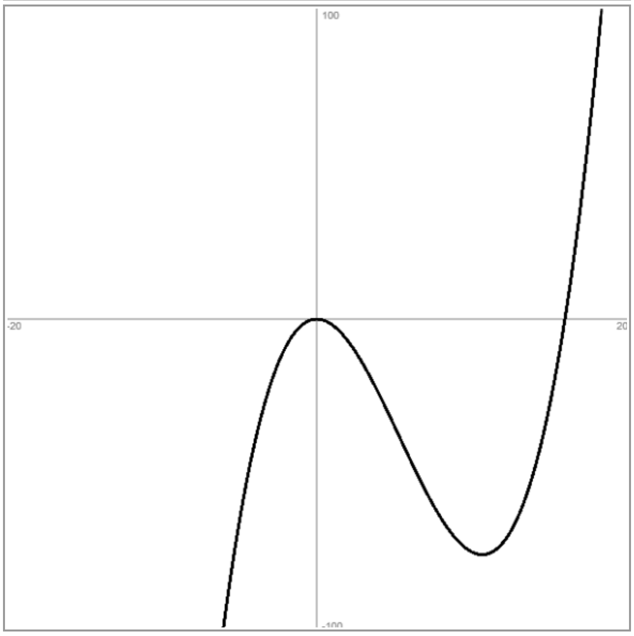
Der Wertebereich ist abhängig vom Grad der ganz rationalen Funktion, d.h. vom höchsten auftretenden Exponenten; ist dieser ungerade, so gilt immer: $W_f = \mathbf{R}$; ist dieser gerade, so ist bei einer nach oben geöffneten ganz rationalen Funktion das globale Minimum mit Funktionswert y_{min}, bei einer nach unten oben geöffneten ganz rationalen Funktion das globale Maximum mit Funktionswert y_{max} eine Grenze für den Wertebereich $W_f = [y_{min}; \infty)$ bzw. $(-\infty; y_{max}]$. Bei komplexeren ganz rationalen Funktionen sind zur Bestimmung des Wertebereichs W_f Funktionsuntersuchungen (Kurvendiskussionen) durchzuführen, um (lokale, globale) Hoch- und Tiefpunkte zu ermitteln. Beispiele:

i) $f(x) = x^3/8 - 2x^2$, $D_f = \mathbf{R}$, $W_f = \mathbf{R}$:

Wertetabelle:

x	**f(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
0	0	Nullstelle N(0|0) = Hochpunkt H(0|0)
5.33	-37.8904	Wendepunkt W(5.33|-37.89)
10.66	-75.8518	(Lokaler) Tiefpunkt T(10.66|-75.85)
16	0	Nullstelle N(16|0)

Graph:

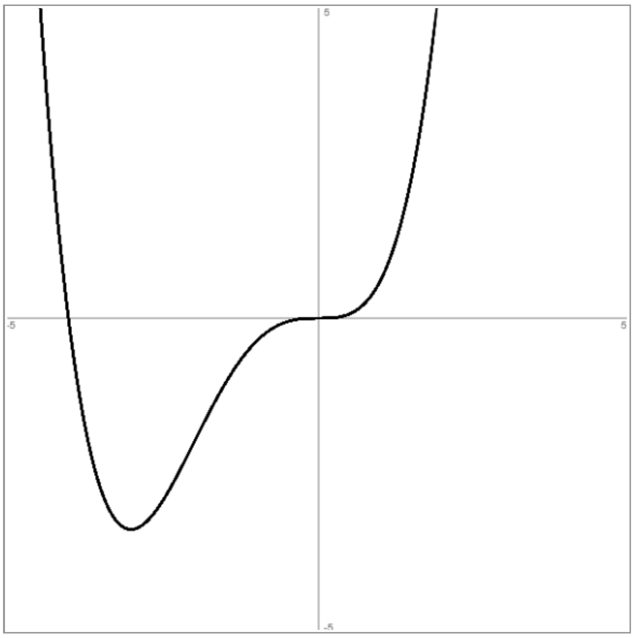


j) $f(x) = x^3(x+4)/8$, $D_f = \mathbf{R}$, $W_f = [-3{,}375; \infty)$:

Wertetabelle:

x	**f(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-4	0	Nullstelle N(-4|0)
-3	-3.375	(Globaler) Tiefpunkt T(-3|-3.375)
-2	-2	Wendepunkt W(-2|-2)
0	0	Schnittpunkt S_y(0|0) = Sattelpunkt W(0|0)

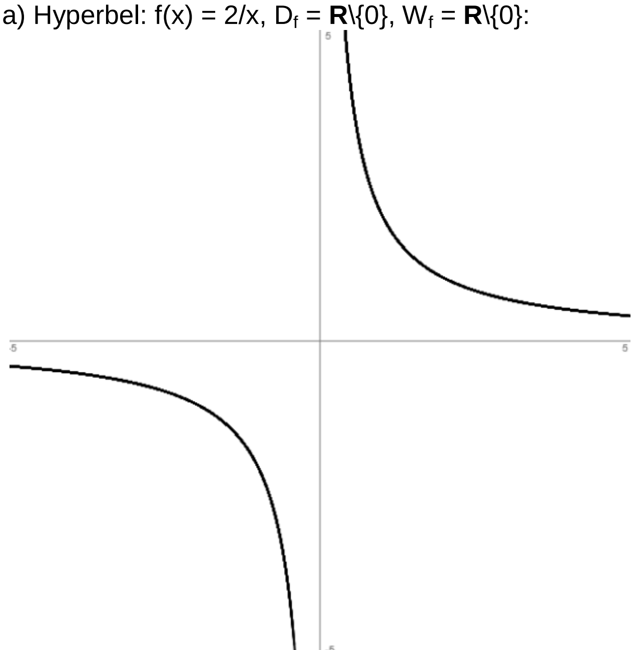
Graph:



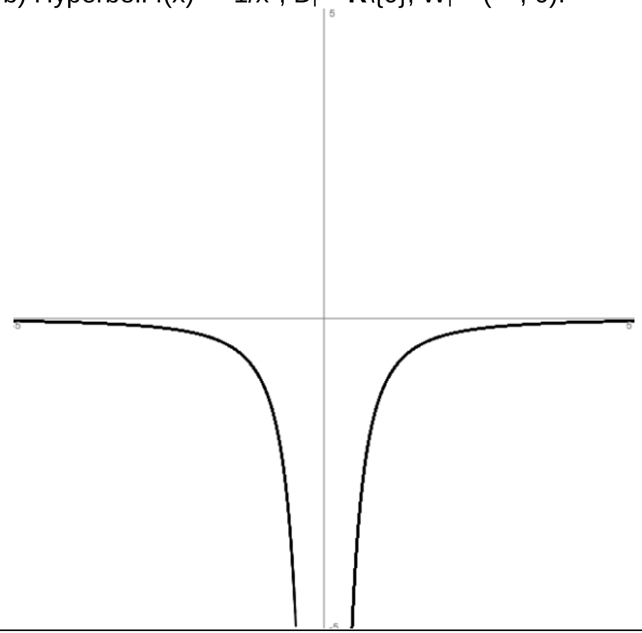
Gebrochen rationale Funktionen

Gebrochen rationale Funktionen sind Brüche von ganz rationalen Funktionen (in Zähler und Nenner), insbesondere auch Hyperbeln $f(x) = a/x^n$ für reelle Zahlen a und natürliche Zahlen n. Beim Definitionsbereich D_f sind die Nullstellen der ganz rationalen Funktion im Nenner als Polstellen (senkrechte Asymptoten) der gebrochen rationalen Funktion auszuschließen (Division durch Null), beim Wertebereich W_f ist das Verhalten der gebrochen rationalen Funktionen an den Polstellen zu beachten (f(x) -> -∞ und/oder f(x) -> ∞) sowie für x -> -∞ und x -> ∞ (waagerechte, schiefe Asymptoten, Grenzkurven). Beispiele:

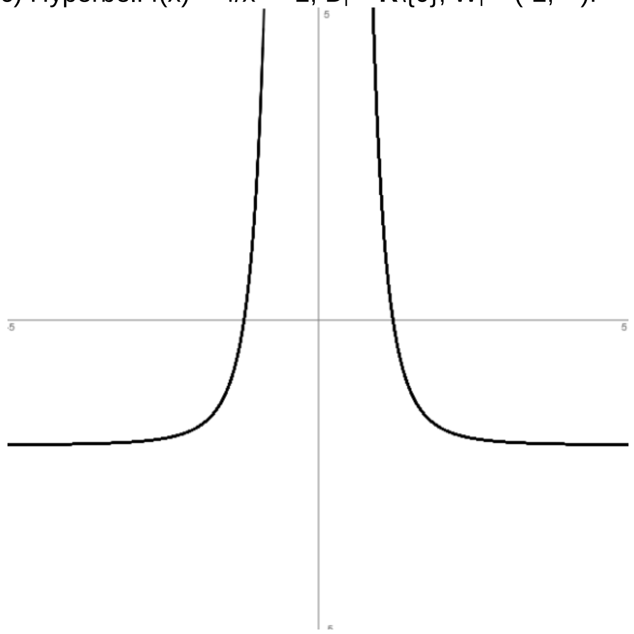
a) Hyperbel: $f(x) = 2/x$, $D_f = \mathbf{R}\backslash\{0\}$, $W_f = \mathbf{R}\backslash\{0\}$:



b) Hyperbel: $f(x) = -1/x^2$, $D_f = \mathbf{R}\backslash\{0\}$, $W_f = (-\infty; 0)$:



c) Hyperbel: $f(x) = 4/x^4 – 2$, $D_f = \mathbf{R}\backslash\{0\}$, $W_f = (-2; \infty)$:

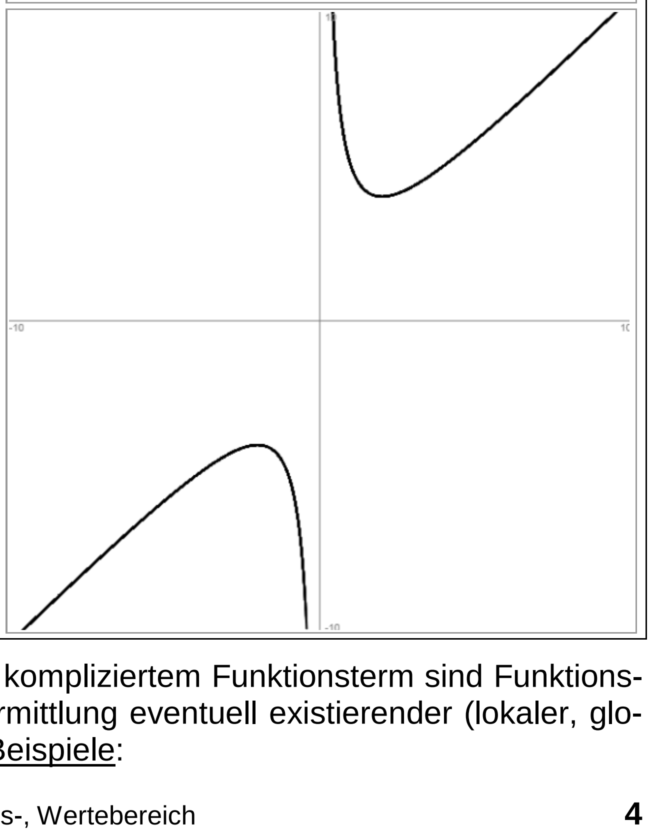


d) $f(x) = x + 4/x$, $D_f = \mathbf{R}\backslash\{0\}$, $W_f = \mathbf{R}\backslash(-4; 4)$:

Wertetabelle:

x	**f(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-2	-4	Hochpunkt H(-2|-4)
0	±∞	Senkrechte Asymptote/Pol x = 0
2	4	Tiefpunkt T(2|4)

Graph:



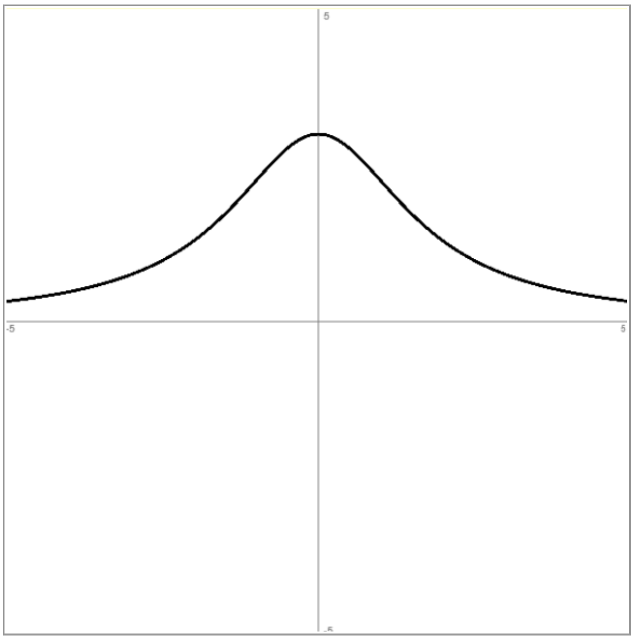
Bei gebrochen rationalen Funktionen f(x) mit kompliziertem Funktionsterm sind Funktionsuntersuchungen (Kurvendiskussionen) zur Ermittlung eventuell existierender (lokaler, globaler) Hoch- und Tiefpunkte durchzuführen. Beispiele:

e) $f(x) = \dfrac{9}{x^2+3}$, D_f = **R**, W_f = (0; 3]:

Wertetabelle:

x	**f(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-> -∞	-> 0	Waagerechte Asymptote y = 0
-1	2.25	Wendepunkt W(-1|2.25)
0	3	Schnittpunkt S_y(0|3) = Hochpunkt H(0|3)
1	2.25	Wendepunkt W(1|2.25)
-> ∞	-> 0	Waagerechte Asymptote y = 0

Graph:

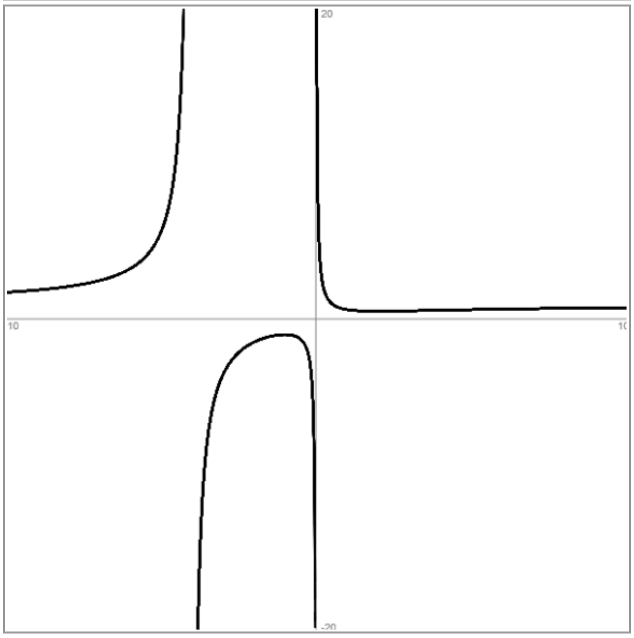


f) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x(x+4)}$, D_f = **R**\{-4; 0}, W_f = **R**\(-1; 0,5):

Wertetabelle:

x	**f(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-> -∞	-> 1	Waagerechte Asymptote y = 1
-4	±∞	Senkrechte Asymptote/Pol x = -4
-1	-1	Hochpunkt H(-1|-1)
0	±∞	Senkrechte Asymptote/Pol x = 0
2	0.5	Tiefpunkt T(2|0.5)
3.7	0.5507	Wendepunkt W(3.7|0.55)
-> ∞	-> 1	Waagerechte Asymptote y = 1

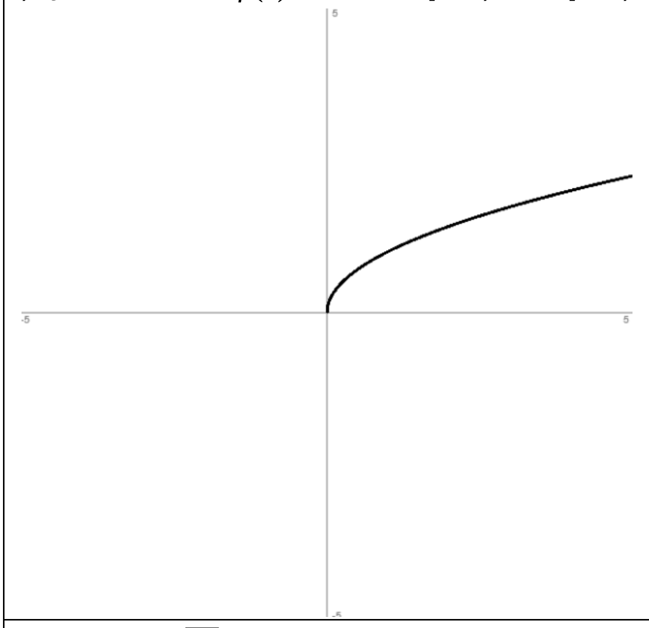
Graph:



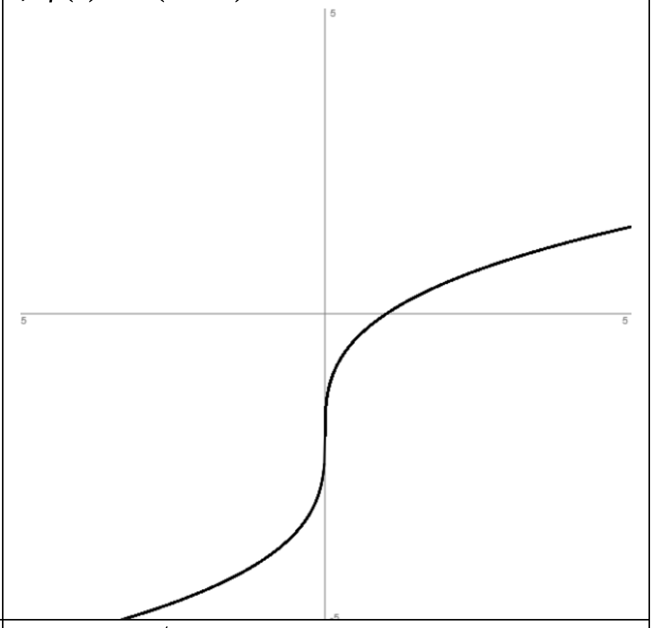
Wurzelfunktionen

Wurzelfunktionen sind Funktionen, die einen Term vom Typ $\sqrt[n]{(.)^m} = (.)^{\frac{m}{n}}$ enthalten mit natürlichen Zahlen m, n. Eine gerade Wurzel (n gerade) ist nur dann definiert, wenn der Radikand nichtnegativ ist, eine ungerade Wurzel (n ungerade) ist bei jedem Radikanden definiert. Dementsprechend orientiert sich der Definitionsbereich D_f an den Radikanden der Wurzelfunktion und an der Stellung des Terms $\sqrt[n]{(.)^m} = (.)^{\frac{m}{n}}$ im Funktionsterm f(x). Der Wertebereich W_f ergibt sich aus der Betrachtung der Funktion hinsichtlich ihrer (lokalen, globalen) Hoch- und Tiefpunkte und für x -> -∞ und x -> ∞ (falls definiert). Beispiele:

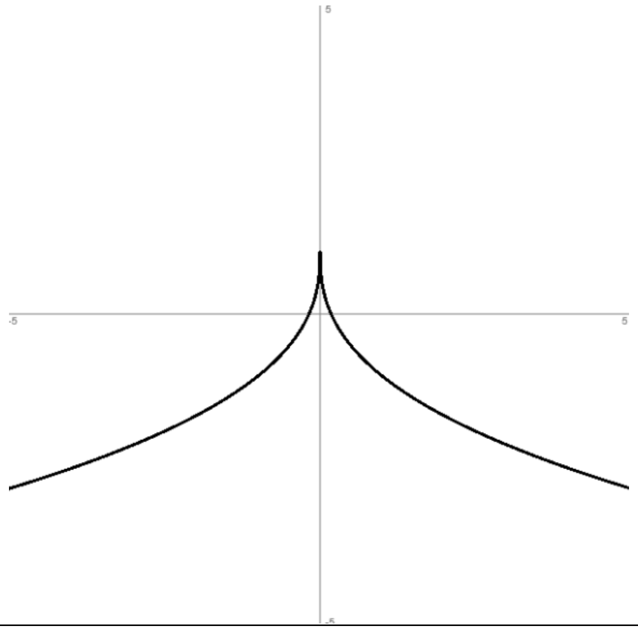
a) Quadratwurzel: $f(x)=\sqrt{x}$, $D_f = [0; \infty)$, $W_f = [0; \infty)$:



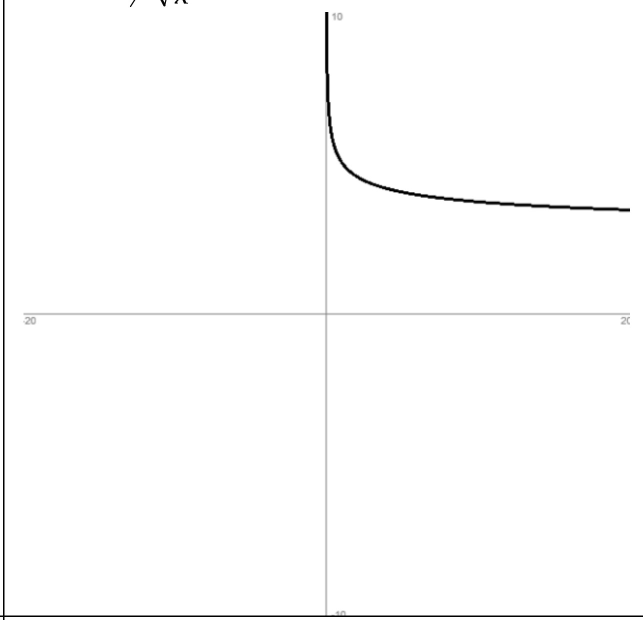
b) $f(x)=2\cdot(\sqrt[3]{x}-1)$, $D_f = \mathbf{R}$, $W_f = \mathbf{R}$:



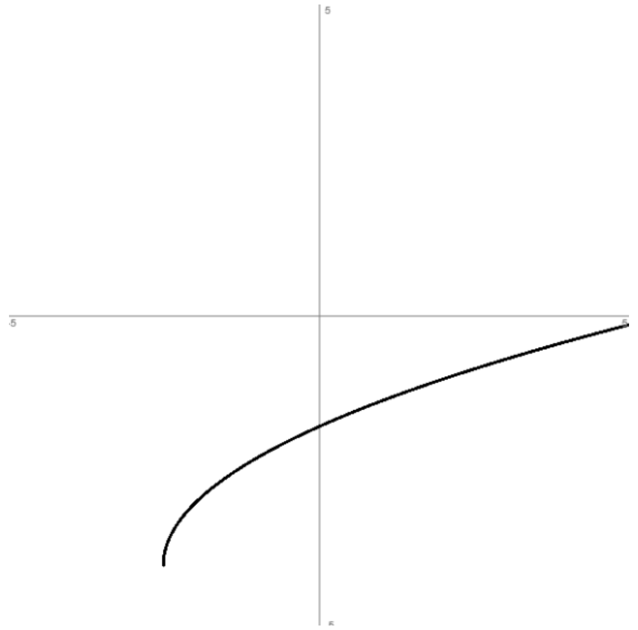
c) $f(x)=-2\cdot\sqrt[5]{x^2}+1$, $D_f = \mathbf{R}$, $W_f = (-\infty; 1]$:



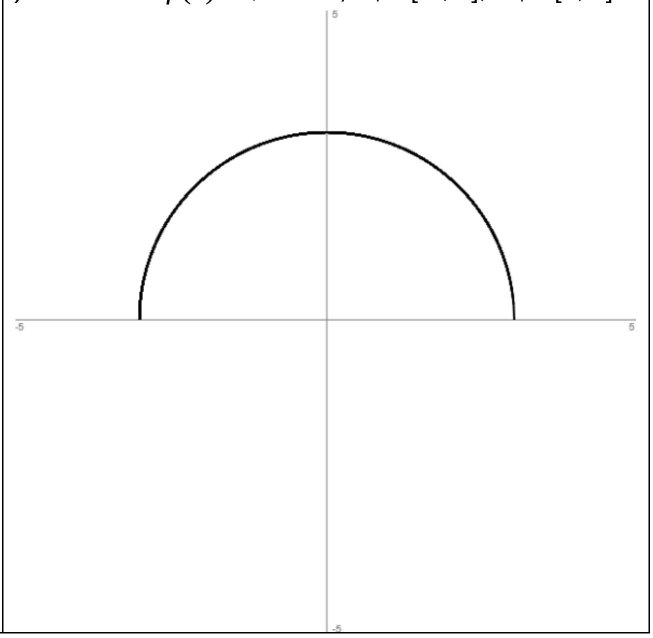
d) $f(x)=10/\sqrt[4]{x}+2$, $D_f = (0; \infty)$, $W_f = (2; \infty)$:



e) $f(x)=\sqrt{2x+5}-4$, $D_f = [-2,5; \infty)$, $W_f = [-4; \infty)$:



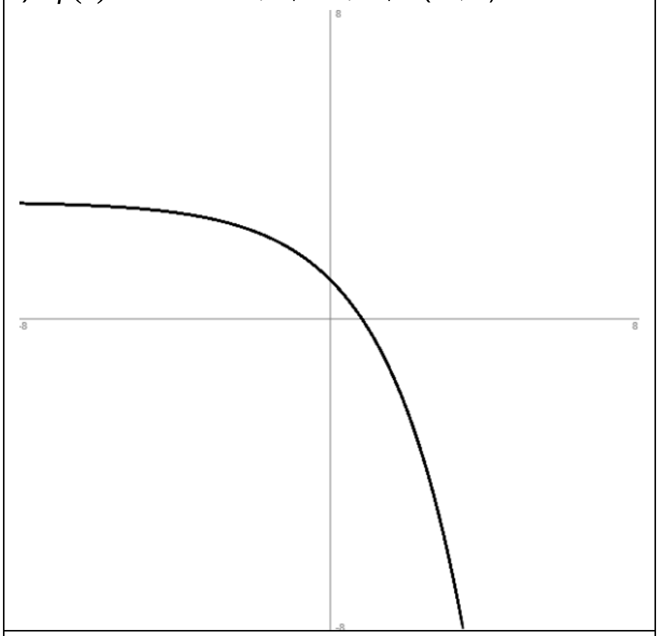
f) Halbkreis: $f(x)=\sqrt{9-x^2}$, $D_f = [-3; 3]$, $W_f = [0; 3]$:



<u>Exponentialfunktionen</u>

Die e-Funktion als Exponentialfunktion f(x) = e^x hat als Definitionsbereich: D_f = **R**, als Wertebereich: W_f = [0; ∞). Von daher ergeben sich die zwei Mengenbereiche bei komplexeren Funktionen, die e-Terme enthalten, aus der Untersuchung der (lokalen, globalen) Hoch- und Tiefpunkte und insbesondere des Verhaltens der Funktion für x -> -∞ und x -> ∞ (waagerechte, schiefe Asymptoten). <u>Beispiele</u>:

a): $f(x) = -2e^{0,5x} + 3$, D_f = **R**, W_f = (-∞; 3):

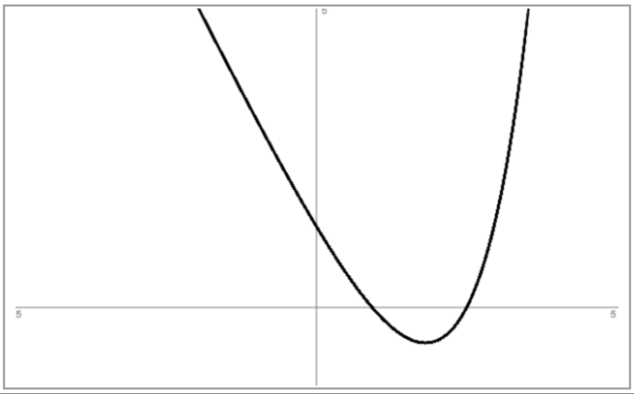


b) $f(x) = \frac{1}{3}e^x - 2x + 1$, D_f = **R**, W_f ≈ [-0,58; ∞):

Wertetabelle:

x	f(x)	Besondere Kurvenpunkte
-> -∞	-> -2x+1	Schiefe Asymptote y = -2x+1
0	1.3333	Schnittpunkt S_y(0|1.33)
0.91	0	Nullstelle N(0.91|0)
1.79	-0.5835	(Globaler) Tiefpunkt T(1.79|-0.58)
2.46	0	Nullstelle N(2.46|0)

Graph:

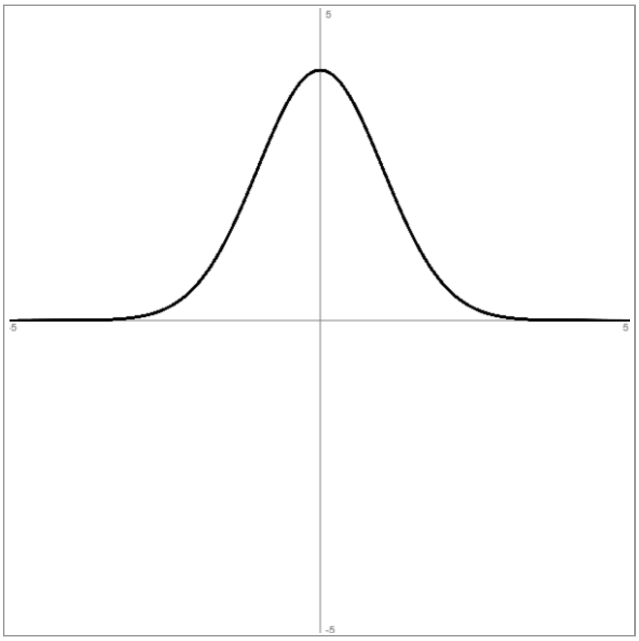


c) Glockenkurve: $f(x) = 4 \cdot e^{-0,5x^2}$, D_f = **R**, W_f = (0; 4]:

Wertetabelle:

x	f(x)	Besondere Kurvenpunkte
-> -∞	-> 0	Waagerechte Asymptote y = 0
-1	2.4261	Wendepunkt W(-1.01|2.43)
0	4	Schnittpunkt S_y(0|4) = Hochpunkt H(0|4)
1	2.4261	Wendepunkt W(1|2.43)
-> ∞	-> 0	Waagerechte Asymptote y = 0

Graph:

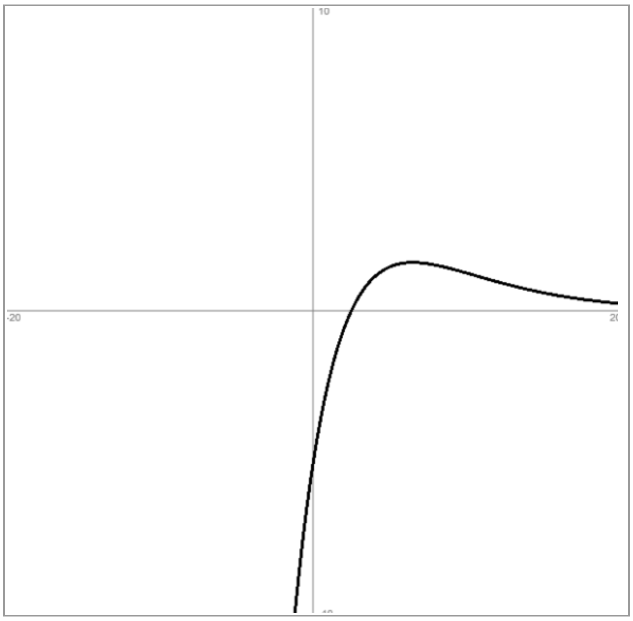


d) $f(x) = (2x-5)e^{-0,25x}$, D_f = (0; ∞), W_f = (2; ∞):

Wertetabelle:

x	f(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	-5	Schnittpunkt S_y(0|-5)
2.5	0	Nullstelle N(2.5|0)
6.5	1.5753	Hochpunkt H(6.5|1.58)
10.5	1.159	Wendepunkt W(10.5|1.16)
-> ∞	-> 0	Waagerechte Asymptote y = 0

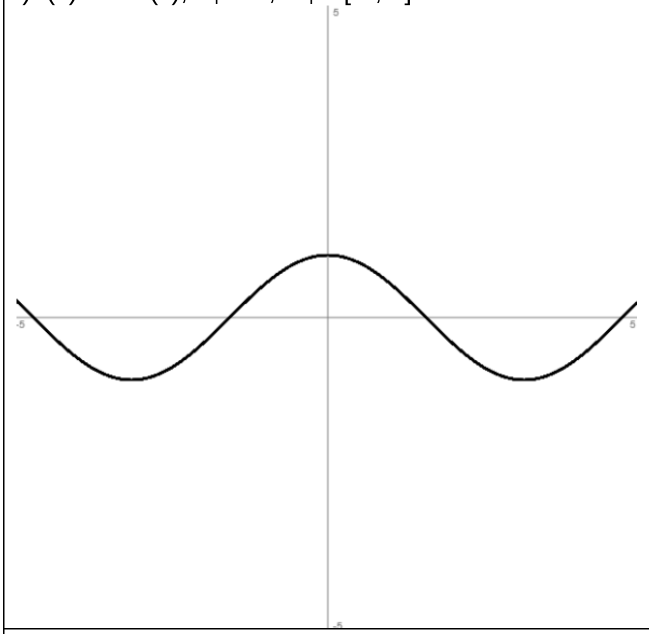
Graph:



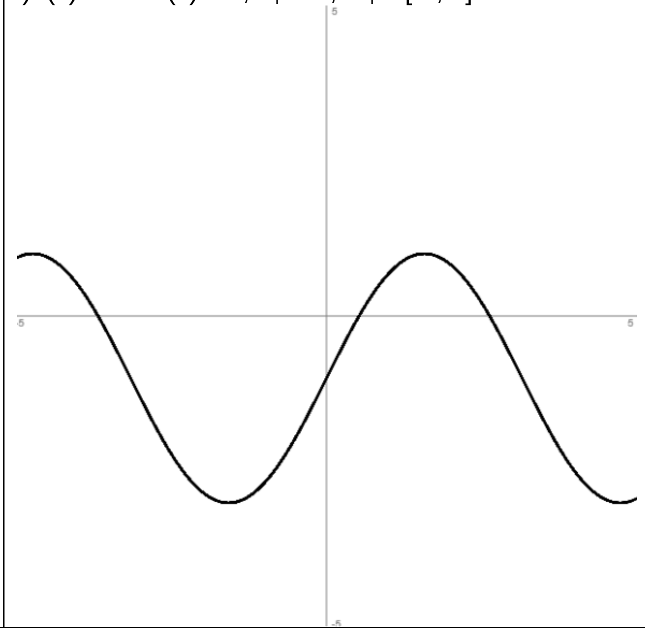
Trigonometrische Funktionen

Trigonometrische (Sinus-, Kosinus-) Funktionen vom Typ $f(x) = a\cdot\sin(b(x-c))+d$ bzw. $f(x) = a\cdot\cos(b(x-c))+d$ mit Amplitude a, Periode $p = 2\pi/b$, Verschiebung entlang der x-Achse c, Verschiebung entlang der y-Achse d sind auf den ganzen reellen Zahlen **R** als maximaler Definitionsbereich D_f = **R** definiert. Der Wertebereich ist: $W_f = [y_T;\ y_H]$ mit $y_T = d - |a|$ bzw. $y_H = d + |a|$ als (gemeinsame) y-Werte aller Tief- und Hochpunkte der trigonometrischen Funktionen. Beispiele:

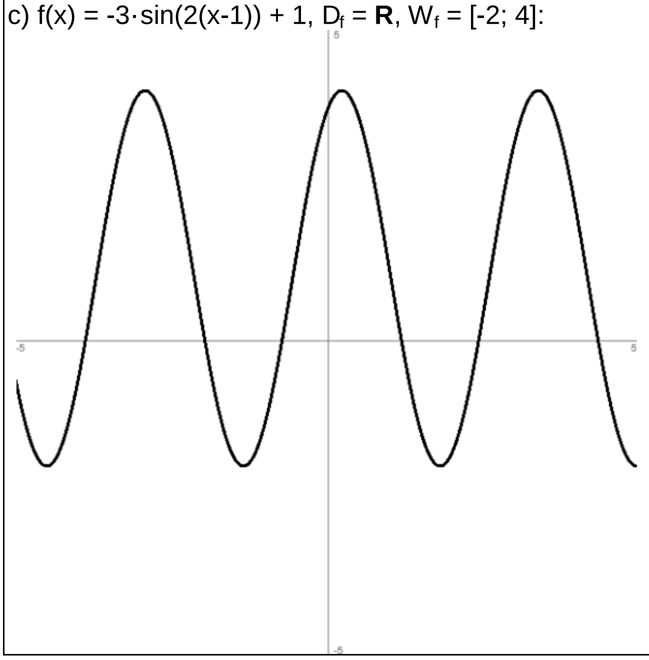
a) $f(x) = \cos(x)$, D_f = **R**, $W_f = [-1; 1]$:



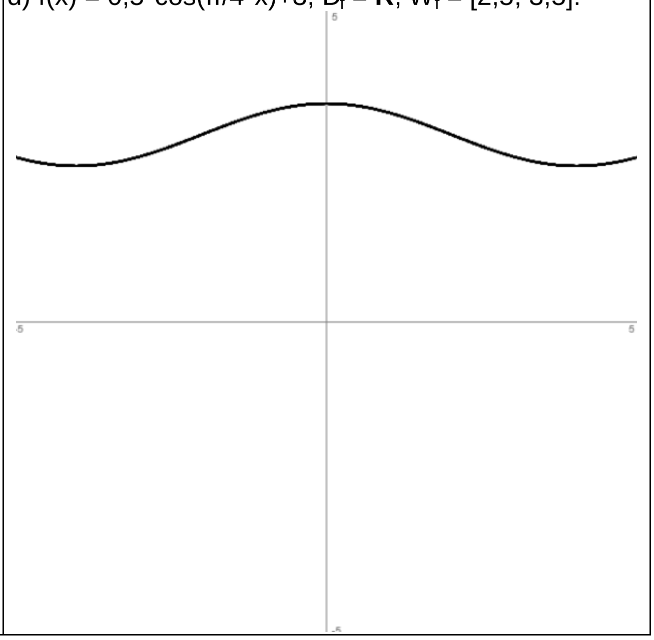
b) $f(x) = 2\cdot\sin(x) - 1$, D_f = **R**, $W_f = [-3; 1]$:



c) $f(x) = -3\cdot\sin(2(x-1)) + 1$, D_f = **R**, $W_f = [-2; 4]$:



d) $f(x) = 0{,}5\cdot\cos(\pi/4\cdot x)+3$, D_f = **R**, $W_f = [2{,}5; 3{,}5]$:



Literaturhinweise: BARTSCH, H.-J., Taschenbuch mathematischer Formeln, Thun-Frankfurt a.M. 1986, S.135 (Funktion, Definitionsbereich, Wertebereich); PAPULA, L., Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Bd.1, Wiesbaden [11]2007, S.1f, 137 (Mengen, reelle Zahlen, Funktion, Definitionsbereich, Wertebereich).