Michael Buhlmann

Mathematik > Analysis > Differenziation > Ableiten ohne Produktregel I

Produktregel

Eine aus zwei Faktoren u(x), v(x) gebildete (Produkt-) Funktion f(x) = u(x)v(x) lässt sich gemäß der Produktregel ableiten vermöge:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Wir setzen nun eine Funktion f(x) vom Typ

$$f(x) = (\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0) \cdot e^{rx}$$

mit vorgegebenen reellen Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$, $r \neq 0$ voraus, die Ableitungsfunktion f'(x) ist vom selben Typ mit:

$$f'(x) = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) \cdot e^{rx}$$

mit zu bestimmenden $a_0, a_1, \ldots a_n$. Funktion und Ableitungsfunktion enthalten als Faktoren Polynome vom selben Grad n, so dass n+1 a_i, i=0, …n, zu ermitteln sind. Dazu leiten wir die Funktion f(x) gemäß der Produktregel ab und erhalten nach obiger Produktregel:

$$f'(x) = (n\alpha_n x^{n-1} + (n-1)\,\alpha_{n-1} x^{n-2} + \ldots + \alpha_1) \cdot e^{rx} + r(\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0) \cdot e^{rx} =$$
$$(r\alpha_n x^n + (n\alpha_n + r\alpha_{n-1}) x^{n-1} + ((n-1)\,\alpha_{n-1} + r\alpha_{n-2}) x^{n-2} + \ldots + (\alpha_1 + r\alpha_0)) \cdot e^{rx}$$

und damit eine weitere Darstellung der Funktion f'(x).

Beziehungen

Die Polynome in den beiden Funktionstermen von f'(x) mit:

$f'(x) = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) \cdot e^{rx}$
$f'(x) = (r\alpha_n x^n + (n\alpha_n + r\alpha_{n-1}) x^{n-1} + ((n-1)\,\alpha_{n-1} + r\alpha_{n-2}) x^{n-2} + \ldots + (\alpha_1 + r\alpha_0)) \cdot e^{rx}$

lassen sich vergleichen, der Koeffizientenvergleich führt auf die folgenden Beziehungen:

$a_n = r\alpha_n$
$a_{n-1} = n\alpha_n + r\alpha_{n-1}$
$a_{n-2} = (n-1)\alpha_{n-1} + r\alpha_{n-2}$
…
$a_k = (k+1)\alpha_{k+1} + r\alpha_k$
…
$a_0 = \alpha_1 + r\alpha_0$,

also:

$a_n \quad = r\alpha_n$
$a_k \quad = (k+1)\alpha_{k+1}+r\alpha_k$, k = 0, … n-1 (*).

<u>Ableitung von Funktionen vom Typ $f(x) = x^n e^{rx}$</u>

Die Funktion $f(x) = x^n e^{rx}$, $n\varepsilon\mathbf{N}$, soll nun abgeleitet werden. Wegen $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$, $\alpha_n = 1$ ergibt sich gemäß (*):

$a_n \quad = r$
$a_{n-1} \quad = n$
$a_k \quad = 0$, k=0,…n-2 (*).

D.h., es ist:

$f'(x) = (rx^n+nx^{n-1})e^{rx}$.

<u>Beispiele</u>

a) Zur Funktion $f(x) = (x^3+5x^2-6)e^{-x}$ mit $\alpha_0 = -6$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 5$, $\alpha_3 = 1$, $r = -1$ ergeben sich die gesuchten Koeffizienten im Polynomteil der Ableitungsfunktion:

$a_3 = -1\cdot 1 = -1$
$a_2 = 3\cdot 1 + (-1)\cdot 5 = 3 - 5 = -2$
$a_1 = 2\cdot 5 + (-1)\cdot 0 = 10$
$a_0 = 1\cdot 0 + (-1)\cdot(-6) = 6$,

so dass $f'(x) = (-x^3-2x^2+10x+6)e^{-x}$ als Ableitung gilt. Die Probe mit Hilfe der Produktregel liefert dasselbe Ergebnis:

$f(x) = (x^3+5x^2-6)e^{-x} \to f'(x) = -(x^3+5x^2-6)e^{-x} + (3x^2+10x)e^{-x} = [-(x^3+5x^2-6)+(3x^2+10x)]e^{-x} = (-x^3-2x^2+10x+6)e^{-x}$.

b) Die Funktion $f(x) = (x^2-2)^2e^{0,5x}$ soll zweimal abgeleitet werden. Zunächst gilt: $f(x) = (x^4-4x^2+4)e^{0,5x}$ mit: $\alpha_0 = 4$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -4$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 1$, $r = 0,5$ und für die 1. Ableitung f'(x) gemäß dem nachstehenden Schema zur Koeffizientenbestimmung von a_4, a_3, a_2, a_1, a_0:

Koeffizienten	r =	0	$\alpha_4 = 1$	$\alpha_3 = 0$	$\alpha_2 = -4$	$\alpha_1 = 0$	$\alpha_0 = 4$
a_4	0,5	$0 + 0,5\cdot 1 = \boxed{0,5}$					
a_3	0,5		$4\cdot 1 + 0,5\cdot 0 = \boxed{4}$				
a_2	0,5			$3\cdot 0 + 0,5\cdot(-4) = \boxed{-2}$			
a_1	0,5				$2\cdot(-4) + 0,5\cdot 0 = \boxed{-8}$		
a_0	0,5					$1\cdot 0 + 0,5\cdot 4 = \boxed{2}$	

und damit: $f'(x) = (0,5x^4+4x^3-2x^2-8x+2)e^{0,5x}$ (vgl. mit der Probe nach der Produktregel: $f(x) = (x^4-4x^2+4)e^{0,5x} \to f'(x) = 0,5(x^4-4x^2+4)e^{0,5x}+(4x^3-8x)e^{0,5x} = [0,5(x^4-4x^2+4)+(4x^3-8x)]e^{0,5x} = (0,5x^4+4x^3-2x^2-8x+2)e^{0,5x}$). Zur Bestimmung der 2. Ableitung und der Koeffizienten a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 wird das obige Schema nochmals mit: $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = -8$, $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = 4$, $\alpha_4 = 0,5$, $r = 0,5$ angewendet:

Koeffizienten	r =	0	$\alpha_4 = 0{,}5$	$\alpha_3 = 4$	$\alpha_2 = -2$	$\alpha_1 = -8$	$\alpha_0 = 2$
a_4	0,5		$0 + 0{,}5\cdot 0{,}5 = \boxed{0{,}25}$				
a_3	0,5			$4\cdot 0{,}5 + 0{,}5\cdot 4 = \boxed{4}$			
a_2	0,5				$3\cdot 4 + 0{,}5\cdot(-2) = \boxed{11}$		
a_1	0,5					$2\cdot(-2) + 0{,}5\cdot(-8) = \boxed{-8}$	
a_0	0,5						$1\cdot(-8) + 0{,}5\cdot 2 = \boxed{-7}$

Es ergibt sich damit: $f''(x) = (0{,}25x^4+4x^3+11x^2-8x-7)e^{0{,}5x}$ (vgl. mit der Probe nach der Produktregel: $f'(x) = (0{,}5x^4+4x^3-2x^2-8x+2)e^{0{,}5x}$ -> $f''(x) = 0{,}5(0{,}5x^4+4x^3-2x^2-8x+2)e^{0{,}5x} + (2x^3+12x^2-4x)e^{0{,}5x} = [0{,}5(0{,}5x^4+4x^3-2x^2-8x+2)+(2x^3+12x^2-4x)]e^{0{,}5x} = (0{,}25x^4+4x^3+11x^2-8x-7)e^{0{,}5x}$).

Höhere Ableitungen

Beispiel b) führt noch auf die Rekursion für höhere Ableitungen. Sei dazu wieder die Funktion vom Typ

$$f(x) = (\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0)\cdot e^{rx}$$

mit vorgegebenen reellen Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$, $r\neq 0$ gegeben. Dann ergibt sich ein rekursives Verfahren zur Bestimmung der ersten m Ableitungen wie folgt:

Rekursionsanfang:
$a_k^{(0)} = \alpha_k$, $k = 0, \ldots n$

Rekursion:
$a_n^{(j)} = ra_n^{(j-1)} = r^n a_n^{(0)}$
$a_k^{(j)} = (k+1)a_{k+1}^{(j-1)}+r\alpha_k^{(j-1)}$, $k = 0, \ldots n-1$ -> $f^{(j)}(x) = (a_n^{(j)}x^n+a_{n-1}^{(j)}x^{n-1}+\ldots+a_1^{(j)}x+a_0^{(j)})\cdot e^{rx}$, $j = 1, \ldots m$.

Beispiel

c) Mit der eben dargelegten Rekursion lassen sich nach dem Schema in Beispiel b) die ersten fünf Ableitungen zu $f(x) = (x^2+x+8)e^{2x}$ wie folgt bestimmen:

j = 1:					
Koeffizienten	r =	0	$a_2^{(j-1)} = 1$	$a_1^{(j-1)} = 1$	$a_0^{(j-1)} = 8$
$a_2^{(j)}$	2		$0 + 2\cdot 1 = \boxed{2}$		
$a_1^{(j)}$	2			$2\cdot 1 + 2\cdot 1 = \boxed{4}$	
$a_0^{(j)}$	2				$1\cdot 1 + 2\cdot 8 = \boxed{17}$
$f'(x) = (2x^2+4x+17)e^{2x}$					

j = 2:					
Koeffizienten	r =	0	$a_2^{(j-1)} = 2$	$a_1^{(j-1)} = 4$	$a_0^{(j-1)} = 17$
$a_2^{(j)}$	2		$0 + 2\cdot 2 = \boxed{4}$		
$a_1^{(j)}$	2			$2\cdot 2 + 2\cdot 4 = \boxed{12}$	
$a_0^{(j)}$	2				$1\cdot 4 + 2\cdot 17 = \boxed{38}$
$f''(x) = (4x^2+12x+38)e^{2x}$					

j = 3:					
Koeffizienten	r =	0	$a_2^{(j-1)} = 4$	$a_1^{(j-1)} = 12$	$a_0^{(j-1)} = 38$
$a_2^{(j)}$	2	$0 + 2\cdot 4 = \boxed{8}$			
$a_1^{(j)}$	2		$2\cdot 4 + 2\cdot 12 = \boxed{32}$		
$a_0^{(j)}$	2			$1\cdot 12 + 2\cdot 38 = \boxed{88}$	
$f'''(x) = (8x^2+32x+88)e^{2x}$					

j = 4:					
Koeffizienten	r =	0	$a_2^{(j-1)} = 8$	$a_1^{(j-1)} = 32$	$a_0^{(j-1)} = 88$
$a_2^{(j)}$	2	$0 + 2\cdot 8 = \boxed{16}$			
$a_1^{(j)}$	2		$2\cdot 8 + 2\cdot 32 = \boxed{80}$		
$a_0^{(j)}$	2			$1\cdot 32 + 2\cdot 88 = \boxed{208}$	
$f^{(4)}(x) = (16x^2+80x+208)e^{2x}$					

j = 5:					
Koeffizienten	r =	0	$a_2^{(j-1)} = 16$	$a_1^{(j-1)} = 80$	$a_0^{(j-1)} = 208$
$a_2^{(j)}$	2	$0 + 2\cdot 16 = \boxed{32}$			
$a_1^{(j)}$	2		$2\cdot 16 + 2\cdot 80 = \boxed{192}$		
$a_0^{(j)}$	2			$1\cdot 80 + 2\cdot 208 = \boxed{496}$	
$f^{(5)}(x) = (32x^2+192x+496)e^{2x}$					

Berechnungsschema

Auf der Grundlage der Funktion vom Typ $f(x) = (\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0)\cdot e^{rx}$ mit vorgegebenen reellen Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$, $r\neq 0$ und der Ableitung $f'(x) = (a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0)\cdot e^{rx}$ ergibt sich gemäß den oben durchgerechneten Beispielen als Berechnungsschema:

			$f(x) = (\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0)\cdot e^{rx}$							
Koeffizienten	r =	0	α_n	α_{n-1}	…	α_k	α_{k-1}	…	α_1	α_0
a_n	r	$(n+1)\cdot 0+r\alpha_n = r\alpha_n = a_n$								
a_{n-1}	r		$n\alpha_n+r\alpha_{n-1} = a_{n-1}$							
…				…						
a_k	r				$(k+1)\alpha_{k+1}+r\alpha_k = a_k$					
a_{k-1}	r					$k\alpha_k+r\alpha_{k-1} = a_{k-1}$				
…							…			
a_1	r							$2\alpha_2+r\alpha_1 = a_1$		
a_0	r								$1\alpha_1+r\alpha_0 = a_0$	
			$f'(x) = (a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0)\cdot e^{rx}$							