Michael Buhlmann

Mathematik > Analysis > Folgen, Reihen

Einleitung

Eindimensionale reelle Analysis beschreibt das Teilgebiet der Mathematik, das sich mit reellwertigen Funktionen beschäftigt und dabei als Infinitesimalrechnung, als Differenzial- und Integralrechnung, den Grenzwertbegriff sowie die Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit von Funktionen kreist. Gerade der Grenzwertbegriff der Differenzial- und Integralrechnung ist eng verbunden mit dem Begriff von Folgen als Abbildungen von den natürlichen in die reellen Zahlen.
Grundlage der Differenzial- und Integralrechnung ist der Körper der reellen Zahlen ($\mathbf{R}$, +, ·) mit der Addition und Multiplikation als Rechenoperationen induzierende Verknüpfungen zwischen den Elementen, der 0 als neutralem Element bzgl. der Addition, der 1 als neutralem Element bzgl. der Multiplikation, der algebraischen kommutativen Gruppen ($\mathbf{R}$, +) und ($\mathbf{R}\backslash\{0\}$, ·) (Assoziativgesetz, Gesetz der inversen Elemente, Kommutativgesetz) sowie den die Verknüpfungen verbindenden Distributivgesetzen. Auf dem Zahlbereich der reellen Zahlen lässt sich zudem vermittels „≤" eine totale Ordnung definieren, so dass im geordneten Körper ($\mathbf{R}$, +, ·, ≤) reelle Zahlen miteinander vergleichbar sind (bei $-\infty<x<\infty$ für jede reelle Zahl x; abgeschlossene, offene, halboffene Intervalle [a; b], (a; b], [a; b), (a; b) für reelle Zahlen a, b mit: a<b) und neben Gleichungen auch Ungleichungen algebraisch umgeformt werden können. Auch definieren der Körper der reellen Zahlen einen metrischen Raum, d.h.: der Betrag **| |** der Differenz zweier reeller Zahlen definiert eine (positiv definite, symmetrische) Metrik (mit Dreiecksungleichung), die wiederum die für die reellen Zahlen typische Topologie (eines Hausdorff-Raums) induziert (Trennungsaxiom T_2). Topologie und Ordnung entsprechen dabei einander. Zudem sind die reellen Zahlen vollständig, d.h.: die Grenzwerte von Folgen reeller Zahlen sind wieder reell.

Folgen

Eine Abbildung $\{a_n\}$: $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$, die jeder natürlichen Zahl n genau eine reelle Zahl a_n zuordnet, heißt (unendliche) (Zahlen-) Folge: $n \to a_n$ oder $\{a_n\}_{n\varepsilon\mathbf{N}}$, a_n das n-te Folgenglied. Mit

$$a_n = f(n)$$

definiert die Abbildung f eine Funktionsvorschrift der expliziten Folge. Folgen $\{a_n\}_{n\varepsilon\mathbf{N}}$, bei denen sich Folgenglieder auf vorhergehende Folgenglieder beziehen, heißen rekursiv und lassen sich mit Hilfe einer Funktion f darstellen als:

$$a_n= f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}) \text{ mit vorgegebenem } a_1, a_2, \dots a_k \text{ (rekursive Folge k-ter Ordnung)}$$
$$a_n= f(a_{n-1}) \text{ mit vorgegebenem } a_1 \text{ (rekursive Folge 1. Ordnung).}$$

In jedem Fall heißt $\{a_n\}_{n\varepsilon\mathbf{N}} = \{a_1, a_2, a_3,\dots a_n, a_{n+1}, \dots\}$ also eine Folge.

Beispiele für explizite Folgen sind: {1, 2, 3, 4,…n, n+1, …}; {9, 6, 3, 0, -3, -6,…, 6-3n, 3-3n, …}; {-1, 2, -3, 4, … $(-1)^n\cdot n$, $(-1)^{n+1}\cdot(n+1)$,…}; $a_n = 4n$, $b_n = 17-2n$, $c_n = n^2$.

Beispiele für rekursive Folgen sind: a) $a_n = 2a_{n-1}$, $a_1=2$ besitzt die Folgenglieder: $a_1=2$, $a_2 = 2\cdot 2 = 4$, $a_3 = 2\cdot 4 = 8$, $a_4 = 2\cdot 8 = 16$ usw., also auch die explizite Darstellung: $a_n = 2^n$.

b) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ mit $a_1 = a_2 = 1$ ist die Folge der Fibonacci-Zahlen mit: $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 1+1 = 2$, $a_4 = 2+1 = 3$, $a_5 = 3+2 = 5$, $a_6 = 5+3 = 8$, $a_7 = 8+5 = 13$, $a_8 = 13+8 = 21$ usw.

c) Die Folge $a_n = a_{n-1}^2$ mit $a_1 = 3$ lässt sich explizit darstellen als: $a_n = 3^{2^{n-1}}$.

Besondere Typen von (expliziten, rekursiven) Folgen sind: a) $\{a_n\} = \{x\}$ heißt für reelles x konstante Folge, z.B. als: $a_n = 2$; $b_n = \pi$; $c_n = 49/4$.

b) $\{a_n\}$ mit $a_n \cdot a_{n+1} = -1$ heißt alternierende Folge, z.B. als: $a_n = (-1)^n$; $b_n = (-2)^n$; $c_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$.

c) $\{a_n\} = \{d \cdot n + r\}$ heißt arithmetische Folge mit konstanter Differenz d zwischen zwei aufeinanderfolgenden Folgengliedern. Es gilt: $a_{n+1} - a_n = d$, $a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$, $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$. Die arithmetischen Folgen lassen sich auch rekursiv darstellen als: $a_n = a_{n-1} + d$, $a_1 = d + r$. Beispiele für solche Folgen sind: $\{a_n\} = \{5n - 4\} = \{1, 6, 11, 16, 21, \ldots\}$ mit: $a_{n+1} - a_n = 5$ und $a_n = 1 + 5 \cdot (n-1)$; $\{b_n\} = \{3 + 4n\} = \{7, 11, 15, 19, \ldots\}$ mit $b_{n+1} - b_n = 4$ und $b_n = 1 + 5 \cdot (n-1)$; $c_n = 2n + 7$; $d_n = 7n - 14 = -7 + 7 \cdot (n-1)$. Die rekursive Folge $a_n = a_{n-1} + 4$, $a_1 = 12$ ist wegen $a_n - a_{n-1} = 4 = k$ ebenfalls eine arithmetische Folge vor, für die die explizite Darstellung lautet: $a_n = 4n + 8$. Die arithmetische Folge lautet explizit: $a_n = 117 - 3n$ mit: $a_1 = 117-3 = 114$, $d = -3$, so dass eine rekursive Darstellung der Folge gegeben ist durch: $a_n - a_{n-1} = -3 \Leftrightarrow a_n = a_{n-1} - 3$ mit $a_1 = 114$.

d) $\{a_n\} = \{c \cdot q^n\}$ heißt geometrische Folge mit konstantem Quotienten q zwischen zwei aufeinanderfolgenden Folgengliedern. Es gilt: $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Geometrische Folgen lassen sich rekursiv darstellen als: $a_n = q \cdot a_{n-1}$, $a_1 = c \cdot q$. Geometrische Folgen sind: $a_n = 2^n$; $b_n = (-4)^n$; $c_n = 7 \cdot 8^n$. Bei $a_n = 4a_{n-1}$, $a_1 = 7$, liegt wegen $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 4 = q$ eine geometrische Folge vor mit der Folgenvorschrift: $a_n = \frac{7}{4} \cdot 4^n = 7 \cdot 4^{n-1}$.

Eigenschaften von Folgen

Folgen besitzen dann die Eigenschaften:

Sind $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ Folgen und c eine reelle Zahl, sind $\{c \cdot a_n\}$, $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n \cdot b_n\}$, $\{a_n/b_n\}$ usw. ebenfalls Folgen, soweit definiert.

Eine Folge …

$\{a_n\}$ heißt nach unten beschränkt, wenn es eine untere Schranke $S_u \varepsilon \mathbf{R}$ gibt mit: $a_n \geq S_u$ für alle $n \varepsilon \mathbf{N}$.

$\{a_n\}$ heißt nach oben beschränkt, wenn es eine obere Schranke $S_o \varepsilon \mathbf{R}$ gibt mit: $a_n \leq S_o$ für alle $n \varepsilon \mathbf{N}$.

$\{a_n\}$ heißt beschränkt, wenn $\{a_n\}$ nach oben und nach unten beschränkt ist, d.h.: es gibt eine untere Schranke $S_u \varepsilon \mathbf{R}$ und eine obere Schranke $S_o \varepsilon \mathbf{R}$ mit: $S_u \leq a_n \leq S_o$ für alle $n \varepsilon \mathbf{N}$.

$\{a_n\}$ heißt monoton fallend, falls: $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \varepsilon \mathbf{N}$.

$\{a_n\}$ heißt streng monoton fallend, falls: $a_n > a_{n+1}$ für alle $n \varepsilon \mathbf{N}$.

$\{a_n\}$ heißt monoton steigend, falls: $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \varepsilon \mathbf{N}$.

$\{a_n\}$ heißt streng monoton steigend, falls: $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \varepsilon \mathbf{N}$.

Grundlegend für das Arbeiten mit Folgen ist:

Eine Folge $\{a_n\}$ heißt konvergent, d.h. besitzt einen Grenzwert (Limes) g, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ in jeder noch so kleinen (ε-) Umgebung um g (dem offenen Intervall $(g-\varepsilon, g+\varepsilon)$) ab einem gewissen n (= $n(\varepsilon)$) alle Folgenglieder liegen, d.h.:

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

Im Fall der Konvergenz gilt:

$$g = \lim_{n \to \infty} a_n .$$

Im Fall der Konvergenz ist der Grenzwert („Limes“) einer Folge eindeutig bestimmt.

Eine Folge mit Grenzwert g = 0, heißt <u>Nullfolge</u>. Für eine Folge $\{a_n\}$ mit Grenzwert g ist $\{a_n - g\}$ eine Nullfolge. Für die Nullfolge $a_n = \frac{1}{n}$ und eine beliebige Zahl a>0 gibt es eine natürliche Zahl n mit: $\frac{1}{n} < a$, d.h.: die Menge der rationalen Zahlen **Q** liegt dicht in den reellen Zahlen **R**. Mit Hilfe von Folgen lassen sich somit reelle (irrationale, transzendente) Zahlen konstruieren.

<u>Beispiele</u>: a) Es ist: $\lim_{n->\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ (e als Eulersche Zahl).

b) Es ist: $\lim_{n->\infty} a_n = \sqrt{2}$ für: $a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{1}{a_{n-1}}$, $a_1 = 2$.

Falls alle Grenzwerte existieren, gelten die <u>Grenzwertsätze</u>:

a) $\lim_{n->\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n->\infty} a_n + \lim_{n->\infty} b_n;$

b) $\lim_{n->\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n->\infty} a_n;$

c) $\lim_{n->\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n->\infty} a_n \cdot \lim_{n->\infty} b_n;$

d) $\lim_{n->\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{\lim_{n->\infty} a_n}{\lim_{n->\infty} b_n}$.

Es gelten noch die wichtigen <u>Aussagen</u>:

a) Jede beschränkte monotone Folge besitzt einen Grenzwert.

b) Jede konvergente Folge ist beschränkt. Jede unbeschränkte Folge ist divergent.

c) Es gilt das Majorantenkriterium für Nullfolgen, d.h.: Wenn es zwei Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ gibt mit: $0 \le a_n \le b_n$ und $\{b_n\}$ eine Nullfolge ist, dann ist auch $\{a_n\}$ eine Nullfolge.

d) Für nichtnegative reelle Zahlen k und q folgt:

$$\lim_{n->\infty}\frac{n^k}{q^n} = 0 \text{ (q>1)}, \quad \lim_{n->\infty}\frac{q^n}{n^k} = 0 \text{ (q≤1)}.$$

e) Es gilt für Folgen, die aus Brüchen mit ganz rationalem Zähler und Nenner bestehen (k, l zeigen jeweils die höchsten Potenzen an):

$$\lim_{n->\infty}\frac{r \cdot n^k + ...}{s \cdot n^l + ...} = \begin{cases} \pm\infty & k > l \\ \frac{r}{s} & k = l \\ 0 & k < l \end{cases}.$$

f) Ist f: D_f -> **R** eine reellwertige stetige Funktion, so gilt hinsichtlich der (existierenden) Grenzwerte der Folgen a_n und $f(a_n)$:

$$\lim_{n->\infty} f(a_n) = f(\lim_{n->\infty} a_n).$$

<u>Beispiele</u>: a) Es gelten die Grenzwertsätze: $\lim_{n->\infty}(\frac{7}{n} - 8 - \frac{1}{n^2}) = \lim_{n->\infty}\frac{7}{n} - \lim_{n->\infty} 8 - \lim_{n->\infty}\frac{1}{n^2} = 0 - 8 - 0 = -8;$

$\lim_{n->\infty}\frac{1}{n^2} = \lim_{n->\infty}\frac{1}{n} \cdot \lim_{n->\infty}\frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0$; $\lim_{n->\infty}(3+\frac{4}{n^2})^4 = (\lim_{n->\infty}(3+\frac{4}{n^2}))^4 = (\lim_{n->\infty} 3 + \lim_{n->\infty}\frac{4}{n^2})^4 = (3+0)^4 = 81;$

$$\lim_{n->\infty}\frac{n^2-7n+8}{4+n+2n^2}=\lim_{n->\infty}\frac{1-\frac{7}{n}+\frac{8}{n^2}}{\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n}+2}=\frac{\lim\limits_{n->\infty}(1-\frac{7}{n}+\frac{8}{n^2})}{\lim\limits_{n->\infty}(\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n}+2)}=\frac{\lim\limits_{n->\infty}1-\lim\limits_{n->\infty}\frac{7}{n}+\lim\limits_{n->\infty}\frac{8}{n^2}}{\lim\limits_{n->\infty}\frac{4}{n^2}+\lim\limits_{n->\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n->\infty}2}=\frac{1-0+0}{0+0+2}=\frac{1}{2}.$$

b) Die rekursiv definierte Folge $a_n = \frac{a_{n-1}}{n}$, $a_0 = 10$, ist beschränkt, da positiv und kleiner gleich 10, sowie monoton fallend wegen: $a_n = \frac{a_{n-1}}{n} < \frac{a_{n-1}}{1} = a_{n-1}$. Daher konvergiert die Folge, und ihr Grenzwert g = $\lim\limits_{n->\infty} a_n$ = 0 errechnet sich vermöge der Grenzwertsätze als: $a_n = \frac{a_{n-1}}{n}$ -> $\lim\limits_{n->\infty} a_n = \frac{\lim\limits_{n->\infty} a_{n-1}}{n}$ ⇔ $g = \frac{g}{n}$ ⇔ ng = g ⇔ ng – g = 0 ⇔ (n-1)g = 0 ⇔ g = 0.

c) Mit $\lim\limits_{n->\infty}\frac{1}{n}=0$ als Nullfolge gilt wegen $0\le\frac{1}{n^4}\le\frac{1}{n^2}\le\frac{1}{n}$ nach dem Majorantenkriterium: $\lim\limits_{n->\infty}\frac{1}{n^4}=0$, $\lim\limits_{n->\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

d) Es gilt für Folgen als Brüche mit ganz rationalem Zähler und Nenner: $\lim\limits_{n->\infty}\frac{4n^2+3n-17}{n^2+28n-128}=4$; $\lim\limits_{n->\infty}\frac{2n-n^3}{6+n^2+2n^3}=-\frac{1}{2}$; $\lim\limits_{n->\infty}\frac{5+6n}{5+3n^2}=0$. Diese Vorgehensweise ist auch auf andere Potenzen übertragbar, u.a. auf: $\lim\limits_{n->\infty}\frac{2^n+3^n+4}{6+2^n-3^n}=-1$; $\lim\limits_{n->\infty}\frac{n+3^n}{n^8+3^n}=1$; $\lim\limits_{n->\infty}\frac{2^{-n}+n}{2^{-n}+4n}=\frac{1}{4}$; $\lim\limits_{n->\infty}\frac{n^{1000}}{1{,}1^n}=0$; $\lim\limits_{n->\infty}\frac{\sqrt{n}+n}{\sqrt{n}-2n}=-\frac{1}{2}$.

e) Für stetige Funktion wie z.B. die Wurzelfunktion ergibt sich in der Grenzwertberechnung für Folgen: $\lim\limits_{n->\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n}}=\sqrt{\lim\limits_{n->\infty}(1-\frac{1}{n})}=\sqrt{\lim\limits_{n->\infty}1-\lim\limits_{n->\infty}\frac{1}{n}}=\sqrt{1-0}=1$; $\lim\limits_{n->\infty}\sqrt{\frac{n^4+2^n}{n-3^n}}=\sqrt{\lim\limits_{n->\infty}\frac{n^4+2^n}{n-3^n}}=\sqrt{0}$ = 0.

Summenfolgen, Reihen

(Unendliche) Reihen mit einer Folge $\{a_n\}_{n\varepsilon \mathbf{N}}$ lassen sich aus der Folge der Partialsummen $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ bilden beim Übergang n -> ∞ als: $\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i\right\}_{n\in N}$ bzw. $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ gerade im Fall der Konvergenz, d.h. der Reihe als reeller Zahl. Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ist damit der (existierende) Grenzwert einer Folge von Partialsummen. Der „Wert" s_n -> s der unendlichen Reihe kann dabei unbestimmt, +∞ oder -∞ sein, es kann sich aber auch eine reelle Zahl s ergeben. Im ersten Fall spricht von der Divergenz, im zweiten von der Konvergenz der unendlichen Reihe.

Es gelten die folgenden Konvergenz-/Divergenzkriterien für Reihen:

a) Nullfolgenkriterium: Konvergiert die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, so bilden die $\{a_i\}_{i\varepsilon \mathbf{N}}$ eine Nullfolge, d.h.

es ist: $\lim_{i->\infty} a_i = 0$. Wenn daher über Folgen summiert wird, die keine Nullfolgen sind, so ist die dazugehörige Reihe divergent.

b) Leibnizkriterium: Eine alternierende Reihe $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1} a_i$ ist genau dann konvergent, wenn die $\{a_i\}_{i\varepsilon\mathbf{N}}$ mit $a_i \geq 0$ eine Nullfolge bilden, d.h.: $\lim_{i->\infty} a_i = 0$.

c) Quotientenkriterium: Gilt bei einer Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ für den Grenzwert $\lim_{i->\infty}\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| = q$, so ist die Reihe konvergent, falls q<1, divergent, falls q>1. Im Fall q=1 greift das Kriterium nicht; die Reihe kann sowohl konvergent als auch divergent sein.

d) Wurzelkriterium: Gilt bei einer Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ für den Grenzwert $\lim_{i->\infty}\sqrt[i]{|a_i|} = q$, so ist die Reihe konvergent, falls q<1, divergent, falls q>1. Im Fall q=1 greift das Kriterium nicht; die Reihe kann sowohl konvergent als auch divergent sein.

e) Majorantenkriterium: Lässt sich eine Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ mit $a_i \geq 0$ durch eine andere Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ nach oben abschätzen, gilt also $a_i \leq b_i$ für alle i, so ist die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergent, falls die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ konvergent ist.

f) Minorantenkriterium: Lässt sich eine Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ mit $a_i \geq 0$ durch eine andere Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ nach unten abschätzen, gilt also $a_i \geq b_i \geq 0$ für alle i, so ist die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ divergent, falls die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ divergent ist.

g) Integralkriterium: Existiert für eine Funktion f(x) das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$, so ist mit $a_i = f(i)$, $i\varepsilon\mathbf{N}$, die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergent. Existiert das uneigentliche Integral nicht, so divergiert die Reihe.

Eine Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ konvergiert. Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ist konvergent. Reihen, die nach dem Quotienten- oder Wurzelkriterium konvergieren, sind absolut konvergent. Für absolut konvergente Reihen gilt die Dreiecksungleichung:

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| .$$

Werden in einer absolut konvergenten Reihe deren Summanden anders angeordnet (umgeordnet), bleibt die Reihe konvergent.

Konvergente und divergente Reihen

Es gilt:

a) Die harmonische Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ ist divergent.

b) Die geometrische Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} q^i$ konvergiert (absolut) für |q| < 1 mit Reihenwert:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \frac{1}{1-q}\,.$$

Für alle anderen reellen q divergiert die geometrische Reihe.

c) Sind zwei Reihen $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ absolut konvergent, so ist auch ihr Cauchy-Produkt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{i} a_j b_{i-j} \right)_i = \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i \right)$$

absolut konvergent.

d) Liegt für eine reellwertige Funktion f(x) eine Potenzreihe f(x) = $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ (als Taylorreihe) vor, so ergibt sich für ein beliebiges x_0 aus dem Konvergenzbereich der Potenzreihe (Konvergenzradius R -> Konvergenzintervall) der Reihenwert: $f(x_0)$ = s = $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x_0^i$.

Beispiele: a) Die Reihe $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{(i-1)i}$ konvergiert. Es lässt sich sogar ihr Reihenwert bestimmen vermöge der Betrachtung der Partialsummen: $s_n = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{(i-1)i} = \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{(i-1)} - \frac{1}{i} \right) = 1 - \frac{1}{n}$. Dann ist nämlich: s = $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{(i-1)i} = \lim_{n->\infty} s_n = \lim_{n->\infty} (1 - \frac{1}{n}) = 1 - 0 = 1$.

b) Die Reihe $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ ist konvergent auf Grund des Majorantenkriteriums: $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i^2} \leq \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{(i-1)i}$ und a).

c) Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}$ ist divergent, da die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ divergent ist und das Minorantenkriterum: $\frac{1}{i} < \frac{1}{\sqrt{i}}$ gilt.

d) Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{1}{i}$ ist konvergent auf Grund des Leibnizkriteriums.

e) Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ist wegen $\lim_{n->\infty} \left| \frac{q^{n+1}}{q} \right| = \lim_{n->\infty} |q| = |q|$ konvergent für |q|<1, also für -1<q<1, (unbestimmt) divergent für |q|≥1.

f) Die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i + i}$ ist konvergent nach dem Wurzelkriterium wegen der Grenzwertberechnung:

$$\lim_{i->\infty} \sqrt[i]{\frac{1}{3^i+i}} = \lim_{i->\infty} \frac{1}{\sqrt[i]{3^i+i}} = \lim_{i->\infty} \frac{1}{3 \cdot \sqrt[i]{1+\frac{i}{3^i}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\lim_{i->\infty} \sqrt[i]{1+\frac{i}{3^i}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{3} < 1.$$

g) Mit f(x) = $\frac{1}{x}$ gilt: $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{R->\infty} \int_1^R \frac{1}{x} dx = \lim_{R->\infty} [\ln x]_1^R = \lim_{R->\infty} (\ln R - \ln 1) = \lim_{R->\infty} \ln R = \infty$. Daher divergiert die harmonische Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$.

h) Mit f(x) = $\frac{1}{x^a}$, a>1, gilt: $\int_1^\infty \frac{1}{x^a} dx = \lim_{R->\infty} \int_1^R \frac{1}{x^a} dx = \lim_{R->\infty} \left[\frac{1}{(1-a)x^{a-1}} \right]_1^R = \lim_{R->\infty} \left(\frac{1}{(1-a)R^{a-1}} - \frac{1}{1-a} \right) = \frac{1}{a-1}$. Daher konvergiert die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^a}$.

i) Für die natürliche Exponentialfunktion f(x) = e^x gilt die Potenzreihendarstellung: $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ mit e als Eulerscher Zahl. Einsetzen von x = 1 in die Potenzreihe ergibt: $e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$, von x = 0,5: $\sqrt{e} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i i!}$.

j) Es gilt die Potenzreihenentwicklung: f(x) = $\arctan x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i-1} x^{2i-1}$ und damit für x = 1: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i-1} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

Literaturhinweise: BUHLMANN, M., Mathematik im Studium. 250 Klausuraufgaben Analysis, Bd.3: Reihen, Ableitungen und Integrale, Essen 1992, S.9-40 (Folgen, Reihen); DEITMAR, A., Analysis (= Springer Spektrum), Berlin-Heidelberg [2]2017, S.45-70 (Folgen, Reihen); dtv-Atlas Schulmathematik, v. F. REINHARDT (= dtv 3099), München [3]2003, S.94-103 (Folgen, Reihen); PAPULA, L., Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium, Bd.1, Wiesbaden [11]2007, S.539-551 (Reihen).

Michael Buhlmann, www.michael-buhlmann.de 01.2022