Michael Buhlmann

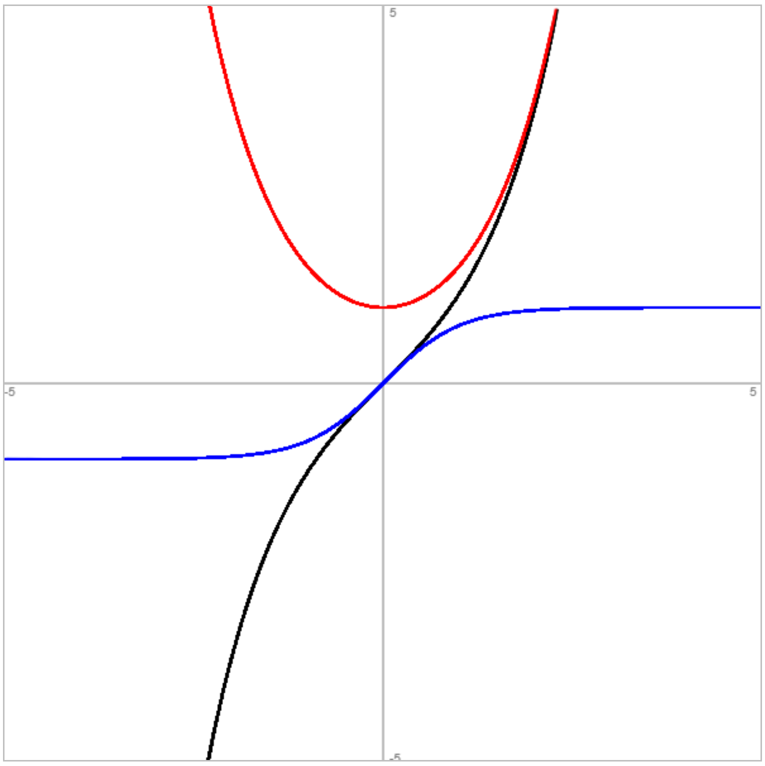
Mathematik > Analysis > Areafunktionen

Hyperbelfunktionen

Mit der Eulerschen Zahl $e = \lim_{n->\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ergibt sich die auf allen reellen Zahlen x definierte, stetige und differenzierbare natürliche Exponentialfunktion y = e^x. Die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion ist: y' = e^x. Mit y = e^x lassen sich die sog. Hyperbelfunktionen Sinus, Kosinus und Tangens hyperbolicus wie folgt:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

definieren. Alle Hyperbelfunktionen sind auf ganz **R** erklärt, dort stetig und differenzierbar.



y = sinh(x), y= cosh(x), y = tanh(x)

Wegen e^x -> +∞ für x -> +∞ und e^x -> 0 für x -> -∞ und folglich e^{-x} -> 0 für x -> +∞ und e^{-x} -> +∞ für x -> -∞ folgt für die Hyperbelfunktionen als Verhalten für betragsmäßig große x:

x -> +∞: sinh(x) -> +∞; x -> -∞: sinh(x) -> -∞
x -> +∞: cosh(x) -> +∞; x -> -∞: cosh(x) -> +∞
x -> +∞: tanh(x) -> 1; x -> -∞: tanh(x) -> -1.

Es ergeben sich damit die folgenden Definitions- und Wertebereiche der Hyperbelfunktionen:

D_{sinh} = **R**, W_{sinh} = **R**
D_{cosh} = **R**, W_{cosh} = [1; +∞)
D_{tanh} = **R**, W_{tanh} = (-1; 1).

Zwischen den Termen der Hyperbelfunktionen bestehen Beziehungen wie etwa:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1\ (*).$$

Alle Hyberbelfunktionen sind differenzierbar, die Ableitungen bestimmen sich als:

f(x) = sinh(x) = $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ => f'(x) = $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ = cosh(x)

f(x) = cosh(x) = $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ => f'(x) = $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ = sinh(x)

f(x) = tanh(x) = $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ => f'(x) = $\frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}$ = 1 – $\tanh^2$(x) (**).

Areafunktionen

Wegen der strengen steigenden Monotonie der Funktionen f(x) = sinh(x) und f(x) = tanh(x) (Injektivität der Funktionen) existieren hier die Areafunktionen als Umkehrfunktionen der beiden (bijektiven) Hyperbelfunktionen auf Definitions- und Wertebereich (Surjektivität der Funktionen: $D_{Umkehrfunktion} = W_{Funktion}$, $W_{Umkehrfunktion} = D_{Funktion}$) vermöge:

f(x) = sinh(x): D_{sinh} = **R**, W_{sinh} = **R** =>

f^{-1}(x) = arsinh(x) = $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, D_{arsinh} = **R**, W_{arsinh} = **R**

f(x) = tanh(x): D_{tanh} = **R**, W_{tanh} = (-1; 1) =>

f^{-1}(x) = artanh(x) = $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, D_{artanh} = (-1; 1), W_{artanh} = **R**.

Dabei ergibt sich der Areasinus aus dem Sinus hyperbolicus nach Vertauschen der Variablen x und y und dem Auflösen der Funktionsgleichung nach y:

y = sinh(x) -> x = sinh(y) ⇔ $x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$ ⇔ $2x = e^y - e^{-y}$ ⇔ $2xe^y = e^{2y} - 1$ ⇔

$0 = e^{2y} - 2xe^y - 1$ ⇔ $e^y = \frac{2x \pm \sqrt{(2x)^2 - 4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = \frac{2x \pm 2\sqrt{x^2+1}}{2}$ ⇔

$e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}$ => $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$ ⇔ $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Entsprechendes gilt für den Tangens hyperbolicus und die Umkehrfunktion:

y = tanh(x) -> x = tanh(y) ⇔ $x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^y(e^y - e^{-y})}{e^y(e^y + e^{-y})} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$ ⇔ $x(e^{2y} + 1) = e^{2y} - 1$ ⇔

$xe^{2y} + x = e^{2y} - 1$ ⇔ $x = e^{2y} - xe^{2y} - 1$ ⇔ $1 + x = e^{2y} - xe^{2y}$ ⇔ $1 + x = (1-x)e^{2y}$ ⇔

$\frac{1+x}{1-x} = e^{2y}$ ⇔ $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2y$ ⇔ $y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Der Kosinus hyberbolicus f(x) = cosh(x) ist auf dem Intervall (-∞; 0) monoton fallend, auf dem Intervall (0; +∞) monoton steigend (und daher insgesamt nicht injektiv). Beschränkt man sich auf D_{cosh} = [0; +∞), so liegt eine streng monoton steigende Funktion mit W_{cosh} = [1; +∞) vor (Injektivität, Surjektivität), folglich (Bijektivität) lässt sich der Areacosinus als Umkehrfunktion wie folgt bestimmen:

y = cosh(x) -> x = cosh(y) ⇔ $x = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$ ⇔ $2x = e^y + e^{-y}$ ⇔ $2xe^y = e^{2y} + 1$ ⇔

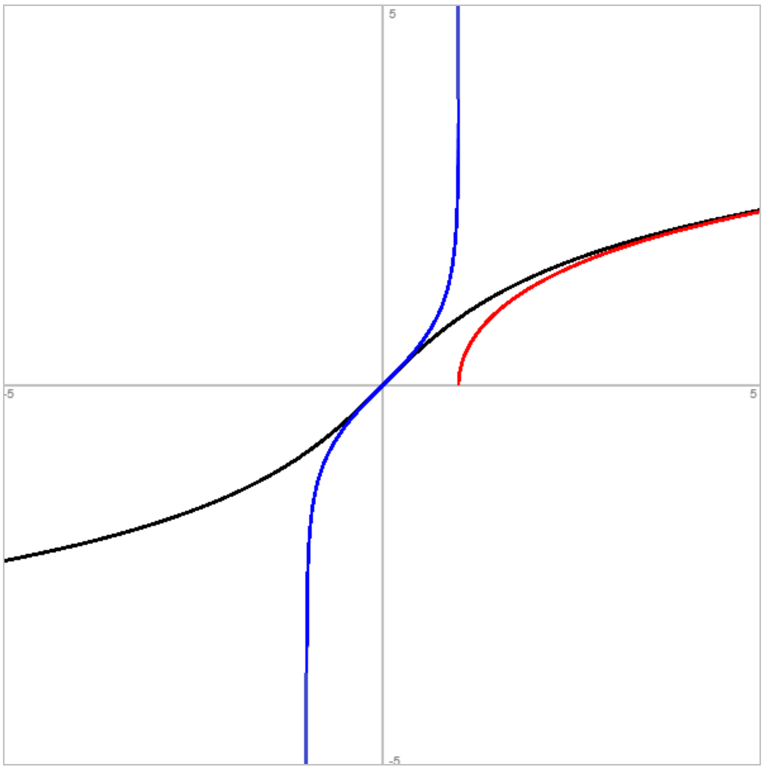
$0 = e^{2y} - 2xe^y + 1$ ⇔ $e^y = \frac{2x \pm \sqrt{(2x)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = \frac{2x \pm 2\sqrt{x^2 - 1}}{2}$ ⇔

$e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$ => $e^y = x + \sqrt{x^2 - 1}$ ⇔ $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.

Zusammenfassend ergibt sich:

f(x) = cosh(x): D_{cosh} = [0; +∞), W_{cosh} = [1; +∞) =>

f^{-1}(x) = arcosh(x) = $\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$, D_{arcosh} = [1; +∞), W_{arcosh} = [0; +∞).



y = arsinh(x), y= arcosh(x), y = artanh(x)

Ableitungen

Wie gesehen, lassen sich die Areafunktionen ausdrücken als:

f(x) = arsinh(x) = $\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

f(x) = arcosh(x) = $\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

f(x) = artanh(x) = $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Die Funktionen lassen sich dann vermöge ihrer Darstellung durch den natürlichen Logarithmus ableiten als:

f(x) = arsinh(x) = $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ => f'(x) =

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=$$

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

f(x) = arcosh(x) = $\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ => f'(x) =

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)=$$

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

f(x) = artanh(x) = $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ => f'(x) =

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{1\cdot(1-x)-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x+1+x}{\frac{1+x}{1-x}\cdot(1-x)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(1+x)\cdot(1-x)}=\frac{1}{1-x^2}.$$

Über die Tatsache, dass die Areafunktionen Umkehrungen der Hyperbelfunktionen sind, lassen sich ebenfalls obige Ableitungen bilden. Wegen $(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ bei y = f(x) erhalten wir:

x = sinh(y) => x' = cosh(y)

y = arsinh(x) => y' = $\frac{1}{x'}=\frac{1}{\cosh(y)}\underset{(*)}{=}\frac{1}{\sqrt{\sinh^2(y)+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

x = cosh(y) => x' = sinh(y)

y = arcosh(x) => y' = $\frac{1}{x'}=\frac{1}{\sinh(y)}\underset{(*)}{=}\frac{1}{\sqrt{\cosh^2(y)-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x = tanh(y) => x' = 1–tanh(y)

y = artanh(x) => y' = $\frac{1}{x'}\underset{(**)}{=}\frac{1}{1-\tanh^2(y)}=\frac{1}{1-x^2}$.

<u>Literaturhinweise</u>: PAPULA, L., Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Bd.1, Wiesbaden [11]2007, S.286-293 (Hyperbel-, Areafunktionen)

Michael Buhlmann, www.michael-buhlmann.de 12.2020