Michael Buhlmann

Schülerkurs

Mathematik
> Analysis
> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung
> Polynome

Kurvendiskussionen/Funktionsuntersuchungen gehören zum Standard der Mathematik an den Oberstufen der Gymnasien. Das Heft will an Hand von vielen Beispielen einführen in dieses wichtige Thema und gliedert sich in die Abschnitte: Theorie, Aufgaben, Lösungen. Alle Beispiele und Aufgaben sind dabei mit ausführlichen Lösungen ersehen, die mathematische Grundlagen und Regeln begreifbar machen. Die Kurvendiskussionen/Funktionsuntersuchungen gehören zum weiten Feld der Differenzial- und Integralrechnung (Analysis) und werden hier am Beispiel der Polynome dargestellt.

<u>Bezeichnungen</u>:

=	gleich
≠	ungleich
>	größer
<	kleiner
∨	oder
⇒	Folgerung
⇔	Äquivalenz
[a, b]	abgeschlossenes Intervall mit a ≤ x ≤ b, a,b∊**R**
(a, b)	offenes Intervall mit a < x < b, a,b∊**R**
[a, b)	halboffenes Intervall mit a ≤ x < b, a,b∊**R**
(a, b]	halboffenes Intervall mit a < x ≤ b, a,b∊**R**
∊	Element von
N	natürliche Zahlen
$\mathbf{N_0}$	natürliche Zahlen einschließlich der Null
R	reelle Zahlen

Theorie

I. Polynome – eine kurze Einführung

I.1 Polynome (oder ganz rationale Funktionen) sind reelle Funktionen *f*: **R** -> **R**, die auf den ganzen reellen Zahlen **R** definiert sind und mit der Variablen $x \in \mathbf{R}$ die Funktionsvorschrift besitzen:

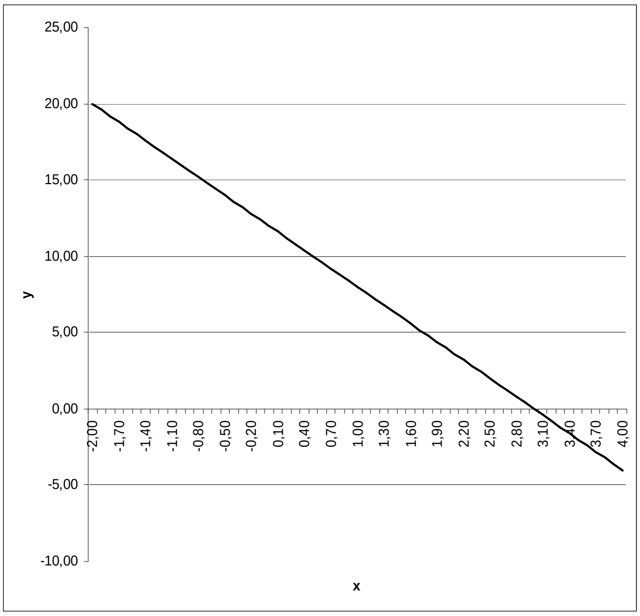
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

mit vorgegebenen $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbf{R}$ und vorgegebener nicht negativer ganzer Zahl $n \in \mathbf{N_0}$. Die Zahl *n* mit $a_n \neq 0$ heißt Grad des Polynoms, die reellen Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ heißen Koeffizienten, das reelle *x* Variable.

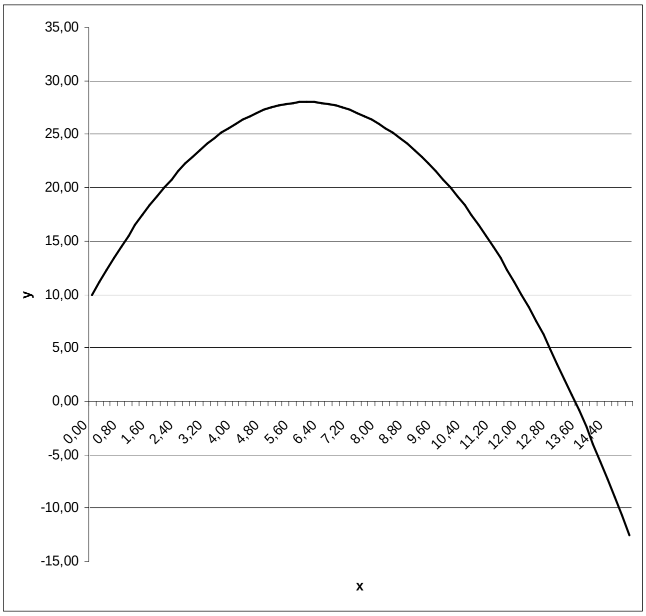
I.2 Beispiele für ganz rationale Funktionen sind:

$f(x) = a$	konstantes Polynom (Parallele zur x-Achse) für ein festes $a \in \mathbf{R}$
$f(x) = x$	Winkelhalbierende (durch den 1. und 3. Quadranten)
$f(x) = x^2$	Normalparabel,

wobei wir uns grafisch im Achsenkreuz von *x*- und *y* = *f(x)*-Achse unter der konstanten Funktion eine Parallele zur *x*-Achse, unter der Winkelhalbierenden eine Gerade durch den Koordinatenursprung, die den rechten Winkel zwischen x- und y-Achse halbiert, unter der Normalparabel eine quadratische Funktion mit dem Koordinatenursprung als Scheitelpunkt vorstellen.



$y = f(x) = 12 - 4x$



$y = f(x) = -0{,}5x^2 + 6x + 10$

Eine Funktion $f(x) = mx + c$ mit der Steigung $m \in \mathbf{R}$ und dem y-Achsenabschnitt $c \in \mathbf{R}$ heißt lineare Funktion oder Gerade (z.B.: $f(x) = 12 - 4x$), bei $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a,b,c \in \mathbf{R}$ liegt eine Parabel vor (z.B.: $f(x) = -0{,}5x^2 + 6x + 10$), mit *a*=1 eine Normalparabel.

I.3 Die ganz rationalen Funktionen *f* lassen sich überall beliebig oft ableiten, d.h.: in jedem Punkt $x \in \mathbf{R}$ existiert die (1.) Ableitung f' als Steigung der Funktion (Kurve), die Ableitung der Abteilung als 2. Ableitung f'' usw. Dabei gilt zum einen die Summenregel für eine endliche Anzahl von aufsummierten Funktionen $u_1(x), u_2(x), \dots u_m(x)$, $m \in \mathbf{N}$, wenn nur die Ableitungen der einzelnen Funktionen im Punkt $x \in \mathbf{R}$ existieren, was bei Polynomen natürlich der Fall ist:

$$\boxed{(u_1(x)+u_2(x))' = u_1'(x)+u_2'(x)}$$

bzw.

$$\boxed{(u_1(x)+u_2(x)+\dots+u_m(x))' = u_1'(x)+u_2'(x)+\dots+u_m'(x)}$$

zum anderen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen $u(x)$ mit (nicht nur) nicht negativen ganzzahligen Exponenten $i \in \mathbf{N_0}$:

$$\boxed{u(x) = x^i \Rightarrow u'(x) = ix^{i-1}}$$

I.4 Also erhalten wir für ein Polynom *f*: **R** -> **R** mit

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

die Ableitungen:

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + 2a_2 x + a_1$$

$$f''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \dots + 2a_2$$

$$f'''(x) = n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)a_{n-1}x^{n-4} + \dots + 6a_3 \text{ usw.}$$

I.5 Beispiel: Das Polynom *f*: **R** -> **R** mit Funktionsvorschrift $f(x) = x^4(x^2+x+3) - 5x + 7$ $= x^6 + x^5 + 3x^4 - 5x + 7$ hat die auch höheren Ableitungen:

$f'(x) = 6x^5 + 5x^4 + 12x^3 - 5$ $\quad f''(x) = 30x^4 + 20x^3 + 36x^2$ $\quad f'''(x) = 120x^3 + 60x^2 + 72x$

$f^{(4)}(x) = 360x^2 + 120x + 72$ $\quad f^{(5)}(x) = 720x + 120$ $\quad f^{(6)}(x) = 720$

$f^{(7)}(x) = f^{(8)}(x) = \dots = 0$.

I.6 Aufgaben: Bestimme zu den Polynomen $f(x)$ die Ableitungen $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$.

a) $f(x) = 90$

b) $f(x) = \frac{7x+5}{4}$

c) $f(x) = 5x^2 - 12x + 89$

d) $f(x) = 6x^4 - 2x^3 + 18x - 4$

e) $f(x) = (x+3)(x^2-9)$

f) $f(x) = (x^2 - 7x + 8)(2 - 4x^2)$

g) $f(x) = \frac{x+2}{3}(x^2 + x^3 - 1)$

h) $f(x) = \frac{2x-3}{7} - \frac{x^6+4x}{9}$

i) $f(x) = (x^2 + 8x - 17)^2$

j) $f(x) = \frac{1}{8}(x^5 - 4x + 16) - \frac{2}{3}(x^4 + 3x + 15)$

I.7 Aufgabe I.6 leitet noch über zur Produktregel und zur Kettenregel als weitere Ableitungsregeln. Für $m \in \mathbf{N}$ und Funktionen $u_1(x), u_2(x), \dots u_m(x)$ gilt im Falle der Differenzierbarkeit die Produktregel:

$$\boxed{(u_1(x) \cdot u_2(x))' = u_1'(x) \cdot u_2(x) + u_1(x) \cdot u_2'(x)}$$

bzw.

$$(u_1(x)\cdot u_2(x)\cdot\ldots\cdot u_m(x))' = \\ u_1'(x)\cdot u_2(x)\cdot\ldots\cdot u_m(x) + \\ u_1(x)\cdot u_2'(x)\cdot\ldots\cdot u_m(x) + \\ \ldots + \\ u_1(x)\cdot u_2(x)\cdot\ldots\cdot u_m'(x)$$

D.h.: Ein Produkt wird abgeleitet, indem man nacheinander jeweils nur einen der Faktoren ableitet, diesen mit den übrigen nicht abgeleiteten Faktoren multipliziert und die so erhaltenen einzelnen Produkte aufsummiert.
Bei der Kettenregel ergibt sich die Ableitung für eine äußere Funktion *v(.)* und eine innere *u(x)* als Produkt von äußerer und innerer Ableitung:

$$(v(u(x)))' = v'(u(x))\cdot u'(x)$$

D.h.: Eine verkettete Funktion wird abgeleitet, indem man die äußere Funktion ableitet und dabei die innere unverändert lässt, dann die innere Funktion ableitet und beide Ableitungen miteinander multipliziert. Sind mehr als zwei Funktionen ineinander verschachtelt, so gilt Entsprechendes.

I.8 Beispiele: a) Für $f(x)=(3x^3-x)(7x^2+2x+2)$ gilt mit den Faktoren und deren Ableitungen $u_1(x)=3x^3-x$, $u_1'(x)=9x^2-1$, $u_2(x)=7x^2+2x+2$, $u_2'(x)=14x+2$ nach der Produktregel:

$$f'(x)=(9x^2-1)(7x^2+2x+2)+(3x^3-x)(14x+2)$$

sowie weiter mit $u_1(x)=9x^2-1$, $u_1'(x)=18x$, $u_2(x)=7x^2+2x+2$, $u_2'(x)=14x+2$, $u_3(x)=3x^3-x$, $u_3'(x)=9x^2-1$, $u_4(x)=14x+2$, $u_4'(x)=14$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 18x(7x^2+2x+2)+(9x^2-1)(14x+2) \\ &\quad +(9x^2-1)(14x+2)+(3x^3-x)\cdot 14 \\ &= 18x(7x^2+2x+2)+2\cdot(9x^2-1)(14x+2)+14\cdot(3x^3-x) \\ &= 126x^3+36x^2+36x+256x^3+36x^2-28x-4+42x^3-14x \\ &= 424x^3+72x^2-6x-4 \end{aligned}$$

$$f'''(x)=1272x^2+144x-6$$

b) Laut der Kettenregel ist die 1. Ableitung zu $f(x)=(2x^3-3x+8)^4$ zu bestimmen auf Grund der äußeren Funktion $v(.)=(.)^4$ mit $v'(.)=4\cdot(.)^3$ und der inneren Funktion $u(x)=2x^3-3x+8$ mit $u'(x)=6x^2-3$ als:

$$f'(x)=4\cdot(2x^3-3x+8)^3\cdot(6x^2-3)=(24x^2-12)(2x^3-3x+8)^3$$

und weiter nach der Produktregel, kombiniert mit der Kettenregel für den zweiten Faktor von *f'(x)*:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 48x(2x^3-3x+8)^3+(24x^2-12)\cdot 3\cdot(2x^3-3x+8)^2(6x^2-3) \\ &= 48x(2x^3-3x+8)^3+12\cdot(6x^2-3)^2(2x^3-3x+8)^2 \\ &= (2x^3-3x+8)^2\cdot[48x(2x^3-5x+8)+12\cdot(6x^2-3)^2] \\ &= (2x^3-3x+8)^2\cdot(96x^4-240x^2+384x+432x^4-432x^2+108) \\ &= (2x^3-3x+8)^2(528x^4-672x^2+384x+108) \text{ usw.} \end{aligned}$$

I.9 Aufgaben: Bestimme zu den Polynomen *f(x)* die Ableitungen *f'(x)*, *f''(x)*, *f'''(x)*:

a) $f(x) = (2x+67)^5$

b) $f(x) = (x-1)^2(x+2)$

c) $f(x) = x^3(x+4)^2$

d) $f(x) = (x^2+4)(x-3x^2)$

e) $f(x) = \left[x^2-(2x+4)^3\right]^5$

f) $f(x) = (x+5)(4x-12)^2(5x+10)^2$

II. Elemente der Kurvendiskussion

II.1 Wir sind nun am Aussehen von Polynomfunktionen als Kurven in einem x-y-Koordinatensystem mit Koordinatenursprung im Punkt O(0|0) interessiert. Als Elemente der Kurvendiskussion, die wir jetzt vorstellen wollen, ergeben sich für ein Polynom:

- Definitionsbereich der Funktion
- Symmetrie
- Nullstellenbestimmung
- Ableitungen
- Bestimmung der Extremwerte
- Bestimmung der Wendepunkte
- Monotonieverhalten
- Krümmungsverhalten
- Verhalten der Funktion im Unendlichen
- Wertetabelle
- Zeichnung
- Bestimmung von Tangenten und Normalen an bestimmten Funktionspunkten (u.a. Wendetangenten)

Wir gehen also aus von einer Polynomfunktion *f*: **R** -> **R** mit

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

für eine Variable $x \in \mathbf{R}$ und reellen Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$.

II.2 Der (maximale) Definitionsbereich eines Polynoms sind immer die reellen Zahlen **R**.

II.3 Für alle x aus dem Definitionsbereich lässt sich also gemäß der Funktionsvorschrift die Zahl *y = f(x)* bilden, indem wir den entsprechenden x-Wert in die Funktionsgleichung einsetzen, den *y*-Wert erhalten und schließlich den Punkt P(*x*|*y*) auf der Funktion. Beispiele:

a) $f(x) = 10x^3 - 5x + 18$ mit: $f(1) = 10\cdot 1^3 - 5\cdot 1 + 18 = 23$, $f(-2) = 10\cdot(-2)^3 - 5\cdot(-2) + 18 = -52$

b) $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + 2$ mit: $f'(x) = 8x^3 - 15x^2$, $f''(x) = 24x^2 - 30x$ und: $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$ sowie: $f(4) = 512 - 320 + 2 = 194$, $f'(4) = 512 - 240 = 272$, $f''(4) = 384 - 120 = 264$ als Werte von Funktion und Ableitungen.

Das systematische Einsetzen von *x*-Werten in die Funktionsgleichung führt dann zu einer Wertetabelle, in der *x*- und *y=f(x)*-Werte beispielsweise untereinander stehen.

II.4 Eine Funktion *f(x)* heißt gerade oder – bezogen auf das x-y-Koordinatensystem – achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn gilt:

$$f(-x) = f(x).$$

f(x) heißt ungerade oder – bezogen auf das x-y-Koordinatensystem – punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung O(0|0), wenn gilt:

$$f(-x) = -f(x) \,.$$

Polynome sind gerade, wenn sie nur Potenzen mit geraden, ungerade, wenn sie nur Potenzen mit ungeraden Exponenten besitzen. Dabei zählt der Koeffizient a_0 wegen $a_0 = a_0 \cdot x^0$ zu den geraden Exponenten. Darüber hinaus treten bei Polynomen (und anderen Funktionen) auch Symmetrien zu anderen, zur y-Achse parallelen Achsen bzw. zu Symmetriepunkten, die nicht Koordinatenursprung sind, auf. Wir gehen hierauf nicht ein.

II.5 Beispiele: a) $f(x) = x^2 + 4$ ist eine verschobene Normalparabel mit geraden Exponenten und daher symmetrisch zur y-Achse.
b) $f(x) = x^3 - 8x$ ist eine ungerade Funktion wegen der ungeraden Exponenten und also punktsymmetrisch zum Ursprung.
c) Bei der Funktion $f(x) = 9x^4 + 2x^3 - 7x + 12$ ist wegen der dort auftretenden geraden und ungeraden Exponenten keine Symmetrie erkennbar.

II.6 a) Ist *f* ein gerades Polynom, so ist *f'* ungerade, *f''* gerade, *f'''* ungerade usw.
b) Ist *f* ein ungerades Polynom, so ist *f'* gerade, *f''* ungerade, *f'''* gerade usw.

II.7 Zur Nullstellenbestimmung, also zur Bestimmung der Schnittpunkte N(x_N|0) mit der x-Achse des x-y-Koordinatensystems ist die Gleichung

$$f(x) = 0$$

nach der Variablen x aufzulösen. Nun lässt sich jedes Polynom als Produkt von linearen und quadratischen Faktoren $ax+b$ bzw. ax^2+bx+c, $a,b,c \in \mathbf{R}$, schreiben, wobei die linearen Faktoren dann 0 werden, wenn für $a \neq 0$ $x = -\frac{b}{a}$ gilt, während die quadratischen Faktoren im Reellen nicht weiter in Linearfaktoren zerlegt und daher auch niemals 0 werden können. Für $p_1(x), p_2(x), \dots p_m(x)$ als lineare und quadratische Faktoren gilt dann: $f(x) = p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot \ldots \cdot p_m(x)$ und weiter auf Grund der Tatsache, dass ein Produkt gleich 0 ist, wenn einer seiner Faktoren 0 ist:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot \ldots \cdot p_m(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow p_1(x) = 0 \vee p_2(x) = 0 \vee \ldots p_m(x) = 0 \end{aligned}$$

Zur Faktorisierung eines Polynoms *f(x)* stehen verschiedene Möglichkeiten zur Verfügung, die auf den Äquivalenzumformungen von linearen und quadratischen Gleichungen basieren. Für lineare Gleichungen gilt die Umformung:

$$\boxed{ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}}$$

, für normierte quadratische Gleichungen ergibt sich gemäß der p-q-Formel:

$$\boxed{x^2 + px + q = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

mit den Koeffizienten $p,q \in \mathbf{R}$, für allgemeine quadratische Gleichungen gilt nach der „Mitternachtsformel“:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

mit den reellen Zahlen *a, b, c*. Dann besitzt ein Polynom *f(x)* dort Nullstellen *x*, wo seine linearen oder quadratischen Faktoren Nullstellen *x* haben, d.h. wo die Faktoren gemäß den Vorgehensweisen bei den Umformungen von linearen und quadratischen Gleichungen nach *x* auflösbar sind.

II.7 Beispiele: a) Das lineare Polynom $f(x) = \frac{1}{2}x - 7$ hat wegen:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x - 7 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 7 \Leftrightarrow x = 14$$

bei *x*=14 eine Nullstelle, also: N(14|0).

b) Für das quadratische Polynom $f(x) = 4x^2 + 8x - 16$ ergeben sich Ansatz und Gleichungsumformungen gemäß der „Mitternachtsformel“:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 8x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-16)}}{2 \cdot 4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 256}}{8} \Leftrightarrow x = -1 \pm \frac{\sqrt{320}}{8} \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{\frac{320}{64}} \Leftrightarrow x = -1 - \sqrt{5} \vee x = -1 + \sqrt{5}$$

Die beiden errechneten x-Werte führen auf die Nullstellen von *f(x)*: $N_1(-1-\sqrt{5}|0)$, $N_2(-1+\sqrt{5}|0)$.

c) Zu $f(x) = x^3 - 2x - 4$ findet sich eine Nullstelle bei *x*=2. Die Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
(x^3-2x-4):(x-2) = x^2+2x+2 \\
\underline{-(x^3-2x^2)} \\
\quad 2x^2-2x-4 \\
\quad \underline{-(2x^2-4x)} \\
\qquad 2x-4 \\
\qquad \underline{-(2x-4)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

ergibt zusätzlich die Gleichung: $x^2 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm \sqrt{-1}$, die wegen des negativen Radikanden keine Lösung besitzt. Die einzige Nullstelle von *f(x)* ist damit N(2|0).

d) Die Nullstellenbestimmung für die Funktion $f(x) = 4x^4 - 949x^2 + 50625$ führt auf eine biquadratische Gleichung und deren Umformung u.a. mit der Substitution z=x^2 bzw. Rücksubstitution x^2=z:

$$4x^4 - 949x^2 + 50625 = 0 \underset{z=x^2}{\Leftrightarrow} 4z^2 - 949z + 50625 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{949 \pm \sqrt{949^2 - 4 \cdot 4 \cdot 50625}}{2 \cdot 4} \Leftrightarrow$$

$$z = \frac{949 \pm \sqrt{90601}}{8} = \frac{949 \pm 301}{8} \Leftrightarrow z = \frac{1250}{8} = 156{,}25 \vee z = \frac{648}{8} = 81 \underset{x^2=z}{\Leftrightarrow} x^2 = 156{,}25 \vee x^2 = 81 \Leftrightarrow$$

$x = \pm 12{,}5 \vee x = \pm 9$ und damit auf die Nullstellen: N_1(-12,5|0), N_2(-9|0), N_3(9|0), N_4(12,5|0).

II.8 a) Der Grad des Polynoms bestimmt die maximal auftretende Anzahl der Nullstellen, d.h.: Bei einer Parabel 2. Grades können höchstens zwei Nullstellen auftreten, bei einem Polynom 3. Grades höchstens 3 usw., bei einem Polynom n. Grades höchstens n.
b) Polynome mit ungeradem Grad (n = 1, 3, 5, …) haben mindestens eine Nullstelle.

II.9 Aufgaben: Errechne die Nullstellen der folgenden Polynomfunktionen.

a) $f(x) = 3x - 7$
b) $f(x) = x^2 + 15x - 364$
c) $f(x) = 10x^2 - 11x + 6$
d) $f(x) = x^2(2x + 17)$
e) $f(x) = (3x + 4)(9x^2 - 25)$
f) $f(x) = x^3 + 81x$
g) $f(x) = 3x^3 - 192$
h) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 4$
i) $f(x) = 4x^4 - 265x^2 + 576$
j) $f(x) = \frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}$
k) $f(x) = x^5 + 5x^4 - 15x^3 - 85x^2 - 26x - 120$
l) $f(x) = x^6 - x^3 - 12$

II.10 a) Eine Funktion *f(x)* ist auf einem Intervall monoton steigend oder monoton fallend, wenn für je zwei Punkte x_1, x_2 aus diesem Intervall gilt:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2) \text{ (steigende Monotonie)}$$
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2) \text{ (fallende Monotonie)}$$

b) Ist eine Funktion *f(x)* differenzierbar an der Stelle x_0, so folgt:

$$f'(x_0) \ge 0 \Rightarrow f(x) \text{ ist monoton steigend in } x_o$$
$$f'(x_0) \le 0 \Rightarrow f(x) \text{ ist monoton fallend in } x_o$$

II.11 Relative Extrema (Extremstellen), Hoch- und Tiefpunkte, sind Punkte x_E einer Funktion *f(x)*, für die gilt:

$$f'(x_E) = 0,\ f''(x_E) < 0 \text{ (relatives Maximum, Hochpunkt)}$$
$$f'(x_E) = 0,\ f''(x_E) > 0 \text{ (relatives Minimum, Tiefpunkt)}$$

Zur Bestimmung von Hoch- und Tiefpunkten einer Funktion ist also die 1. Ableitung gleich 0 zu setzen, so dass die *x*-Werte mit *f'(x)* = 0 zu bestimmen sind (sog. notwendige Bedingung). Die gefundenen *x*-Werte sind die kritischen Stellen, wo die Hoch- oder Tiefpunkte auftreten können, aber nicht müssen. Durch Einsetzen der *x*-Werte in die 2. Ableitung und Überprüfen des Ergebnisses auf >0 oder <0 (sog. hinreichende Bedingung) kann dann endgültig entschieden werden, ob Extrema vorliegen.

II.12 Gilt $f''(x_E) = 0$ in der hinreichenden Bedingung für mögliche Extremstellen x_E, so ist zunächst keine Entscheidung möglich. Folgende Szenarien treten dann auf:

a) Ist in einem Intervall $(x_E - h, x_E)$ (links von der Extremstelle) $f'(x) > 0$ und in einem Intervall $(x_E, x_E + h)$ (rechts vom Extremum) $f'(x) < 0$ (h>0), so liegt ein Hochpunkt bei x_E vor.
b) Ist in einem Intervall $(x_E - h, x_E)$ (links von der Extremstelle) $f'(x) < 0$ und in einem Intervall $(x_E, x_E + h)$ (rechts vom Extremum) $f'(x) > 0$ (h>0), so liegt ein Tiefpunkt bei x_E vor.
c) Gilt für die n. Ableitung erstmals $f^{(n)}(x_E) \neq 0$ (n>2), so liegt bei x_E eine Extremstelle vor, wenn n eine gerade Zahl ist.

II.13 a) Der Grad des Polynoms bestimmt die maximal auftretende Anzahl der Extremstellen, d.h.: Bei einer Parabel 2. Grades gibt es eine Extremstelle, bei einem Polynom 3. Grades höchstens 2 usw., bei einem Polynom n. Grades höchstens n-1.
b) Polynome mit geradem Grad (n = 2, 4, 6, …) haben mindestens eine Extremstelle.

II.14 Bei Polynomen gilt: a) Für $x_{E1} < x_{E2}$ als zwei aufeinanderfolgende Extremstellen eines Polynoms gilt: Liegt bei x_{E1} ein Hochpunkt vor, so ist x_{E2} ein Tiefpunkt und umgekehrt; liegt bei x_{E1} ein Tiefpunkt vor, so ist x_{E2} ein Hochpunkt und umgekehrt.

b) Sind $x_{E1} < x_{E2}$ zwei aufeinanderfolgende Extremstellen eines Polynoms, so ist das Monotonieverhalten der Funktion im Intervall (x_{E1}, x_{E2}) das Gleiche (entweder steigende oder fallende Monotonie). Ist x_E die kleinste Extremstelle, so gilt Entsprechendes für das Intervall (-∞, x_E), ebenso bei x_E als größter Extremstelle mit Intervall (x_E, ∞).
c) Für $x_{E1} < x_{E2}$ als zwei aufeinanderfolgende Extremstellen eines Polynoms gilt: Liegt bei x_{E1} ein Hochpunkt vor, so ist das Polynom auf dem Intervall (x_{E1}, x_{E2}) monoton fallend; liegt bei x_{E1} ein Tiefpunkt vor, so ist das Polynom auf dem Intervall (x_{E1}, x_{E2}) monoton steigend; liegt bei x_{E2} ein Hochpunkt vor, so ist das Polynom auf dem Intervall (x_{E1}, x_{E2}) monoton steigend; liegt bei x_{E2} ein Tiefpunkt vor, so ist das Polynom auf dem Intervall (x_{E1}, x_{E2}) monoton fallend. Liegt bei x_E als kleinster Extremstelle ein Hochpunkt vor, so ist das Polynom auf dem Intervall (-∞, x_E) monoton steigend; liegt bei x_E als kleinster Extremstelle ein Tiefpunkt vor, so ist das Polynom auf dem Intervall (-∞, x_E) monoton fallend. Liegt bei x_E als größter Extremstelle ein Hochpunkt vor, so ist das Polynom auf dem Intervall (x_E, ∞) monoton fallend; liegt bei x_E als größter Extremstelle ein Tiefpunkt vor, so ist das Polynom auf dem Intervall (x_E, ∞) monoton steigend.
d) Die Intervalle zwischen den Extremstellen heißen Monotonieintervalle. Zwei angrenzende Monotonieintervalle haben dann ein unterschiedliches Monotonieverhalten. Es gilt also mit x_E als Extremstelle und den Monotonieintervallen (a, x_E) und (x_E, b) mit a, b als weitere Extrema oder a=-∞ oder b=∞: Ist das Polynom monoton steigend auf (a, x_E), so monoton fallend auf (x_E, b) und umgekehrt; ist das Polynom monoton steigend auf (a, x_E), so ist x_E ein Hochpunkt. Ist das Polynom monoton fallend auf (a, x_E), so monoton steigend auf (x_E, b) und umgekehrt; ist das Polynom monoton fallend auf (a, x_E), so ist x_E ein Tiefpunkt.

II.15 Beispiele: a) Die Funktion $f(x) = x^2(x-7)^2$ besitzt als Polynom 4. Grades maximal drei Extremstellen. *Notwendige Bedingung*: Nullsetzen der 1. Ableitung

$f'(x) = 2x(x-7)^2 + 2x^2(x-7) = 2x(x-7)(2x-7)$ führt auf:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(x-7)(2x-7) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x-7 = 0 \vee 2x-7 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 7 \vee x = 3{,}5$$

mit x_1=0, x_2 = 3,5 und x_3 = 7 als kritischen Stellen. *Hinreichende Bedingung*: Das Einsetzen der kritischen *x*-Werte in die 2. Ableitung

$f''(x) = 2(x-7)(2x-7) + 2x(2x-7) + 2x(x-7)\cdot 2 = 12x^2 - 84x + 98$ ergibt:

$f''(0) = 98 > 0 \Rightarrow x = 0$ als Tiefpunkt T_1(0|0) (wegen *f(0)*=0)

$f''(3{,}5) = 12\cdot 3{,}5^2 - 84\cdot 3{,}5 + 98 = -49 < 0 \Rightarrow x = 3{,}5$ als Hochpunkt H(3,5|150,0625)

$f''(7) = 12\cdot 7^2 - 84\cdot 7 + 98 = 98 > 0 \Rightarrow x = 7$ als Tiefpunkt T_2(7|0).

Die Tief- und Hochpunkte bestimmen das Monotonieverhalten des Polynoms wie folgt:

f(x) ist monoton fallend auf dem Intervall (-∞; 0);
f(x) ist monoton steigend auf dem Intervall (0; 3,5);
f(x) ist monoton fallend auf dem Intervall (3,5; 7);
f(x) ist monoton steigend auf dem Intervall (7; ∞).

b) Beim Polynom $f(x) = \frac{1}{1000}x^6 + \frac{1}{200}x^4$ errechnet sich der einzige Tiefpunkt mit

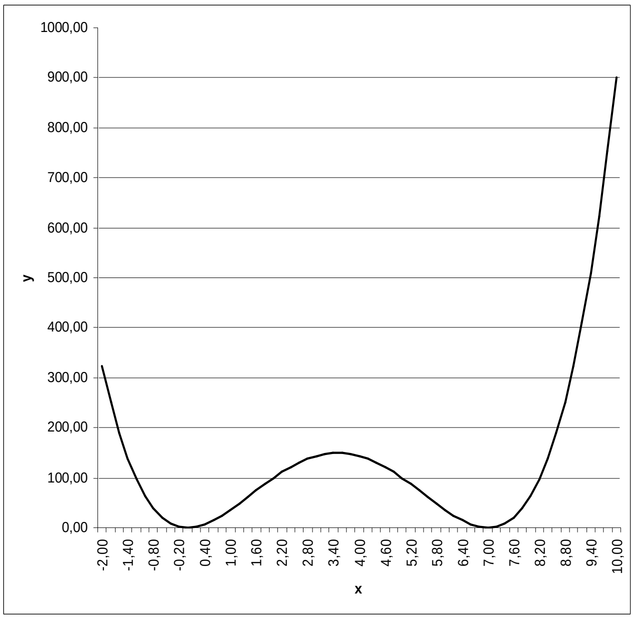
$$f'(x) = \frac{3}{500}x^5 + \frac{1}{50}x^3,\ f''(x) = \frac{3}{100}x^4 + \frac{3}{50}x^2,\ f'''(x) = \frac{3}{25}x^3 + \frac{3}{25}x,\ f^{(4)}(x) = \frac{9}{25}x^2 + \frac{3}{25}$$

wie folgt: *Notwendige Bedingung*:

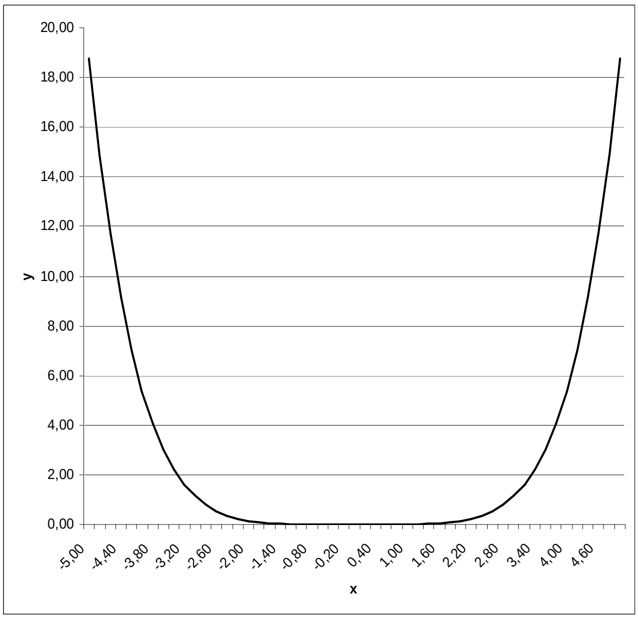
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{500}x^5 + \frac{1}{50}x^3 = 0 \Leftrightarrow 3x^5 + 10x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(3x^2+10) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \vee 3x^2 + 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$x = 0 \vee [3x^2 = -10] \Leftrightarrow x = 0$ als einzige kritische Stelle.

Hinreichende Bedingung: Wegen $f''(0) = 0$ setzen wir den *x*-Wert *x*=0, an dem möglicherweise eine Extremstelle vorliegt, noch in die 3. und 4. Ableitung ein und erhalten: $f'''(0)=0$, $f^{(4)}(0)=\frac{3}{25}$. Da die erste Ableitung ≠0 die 4. Ableitung ist, liegt bei x=0 ein Extremum vor, und zwar wegen $f^{(4)}(0)>0$ ein Minimum mit T(0|0).



$y = f(x) = x^2(x-7)^2$



$y = f(x) = \frac{1}{1000}x^6 + \frac{1}{200}x^4$

II.16 <u>Aufgaben</u>: Bestimme die Extremstellen der folgenden Funktionen und untersuche auf Monotonie:

a) $f(x)=34x-129$

b) $f(x)=\frac{1}{5}x^2-x-\frac{2}{7}$

c) $f(x)=9x^4-8x^2$

d) $f(x)=-\frac{1}{12}x^8$

II.17 <u>Wendepunkte</u> sind Punkte x_W einer Funktion *f(x)*, für die gilt:

$$f''(x_W)=0,\ f'''(x_W)\neq 0 \text{ (Wendepunkt)}$$

Zur Bestimmung von Wendepunkten einer Funktion ist also die 2. Ableitung gleich 0 zu setzen, so dass die *x*-Werte mit *f''(x)* = 0 zu bestimmen sind (sog. notwendige Bedingung). Die gefundenen *x*-Werte sind die kritischen Stellen, wo die Wendepunkte auftreten können, aber nicht müssen. Durch Einsetzen der *x*-Werte in die 3. Ableitung und Überprüfen des Ergebnisses auf ≠0 (sog. hinreichende Bedingung) kann dann endgültig entschieden werden, ob Wendepunkte vorliegen.
Ein Wendepunkt x_W einer Funktion *f(x)* mit $f'(x_W)=0$ heißt <u>Sattelpunkt</u>.

II.18 Gilt $f'''(x_E)=0$ in der hinreichenden Bedingung für mögliche Wendestellen x_W, so ist zunächst keine Entscheidung möglich. Folgende Szenarien treten auf:

a) Ist in einem Intervall (x_E–*h*, x_E) (links vom Wendepunkt) *f''(x)* > 0 und in einem Intervall (x_E, x_E+*h*) (rechts vom Wendepunkt) *f''(x)* < 0 oder in einem Intervall (x_E–*h*, x_E) *f''(x)* < 0 und in einem Intervall (x_E, x_E+*h*) *f''(x)* > 0 (h>0), so liegt ein Wendepunkt bei x_W vor.
b) Gilt für die n. Ableitung erstmals $f^{(n)}(x_W)\neq 0$ (n>2), so liegt bei x_W eine Wendepunkt vor, wenn n eine ungerade Zahl ist.

II.19 a) Der Grad des Polynoms bestimmt die maximal auftretende Anzahl der Wendestellen, d.h.: Bei einem Polynom 3. Grades gibt es einen Wendepunkt, bei einem Polynom 4. Grades höchstens 2 usw., bei einem Polynom n. Grades höchstens n-2 Wendestellen.
b) Polynome mit ungeradem Grad (n = 3, 5, 7, …) haben mindestens einen Wendepunkt.

II.20 Ist eine Funktion *f(x)* zweimal differenzierbar an der Stelle x_0, so folgt:

$f''(x_0) \geq 0 \Rightarrow$ *f(x)* ist <u>konvex</u> (linksgekrümmt) in x_o
$f''(x_0) \leq 0 \Rightarrow$ *f(x)* ist <u>konkav</u> (rechtsgekrümmt) in x_o

Die Funktion heißt auf einem Intervall konvex, wenn sie in jedem Punkt des Intervalls konvex ist. Die Funktion heißt auf einem Intervall konkav, wenn sie in jedem Punkt des Intervalls konkav ist.

II.21 Bei Polynomen gilt dann: a) Sind $x_{W1} < x_{W2}$ zwei aufeinanderfolgende Wendestellen eines Polynoms, so ist das Krümmungsverhalten der Funktion im Intervall (x_{W1}, x_{W2}) das Gleiche (entweder konvex oder konkav). Ist x_W die kleinste Wendestelle, so gilt Entsprechendes für das Intervall (-∞, x_W), ebenso bei x_W als größter Wendestelle mit Intervall (x_W, ∞).
b) Für $x_{W1} < x_{W2}$ als zwei aufeinanderfolgende Wendestellen eines Polynoms *f(x)* gilt: Im Intervall (x_{W1}, x_{W2}) liegt höchstens eine Extremstelle x_E. Ist diese Extremstelle ein Tiefpunkt, so ist das Polynom auf dem Intervall (x_{W1}, x_{W2}) konvex. Ist die Extremstelle ein Hochpunkt, so ist das Polynom auf dem Intervall (x_{W1}, x_{W2}) konkav. Liegt im Intervall (x_{W1}, x_{W2}) keine Extremstelle, so ist ein $x_0 \in (x_{W1}, x_{W2})$ zu wählen. Gilt dann $f''(x_0) > 0$, so ist das Polynom auf (x_{W1}, x_{W2}) konvex; gilt $f''(x_0) < 0$, so ist das Polynom auf (x_{W1}, x_{W2}) konkav. Ist x_W die kleinste Wendestelle, so ist das Polynom auf dem Intervall (-∞, x_W) konvex, wenn für einen Punkt $x_0 \in (-\infty, x_W)$ $f''(x_0) > 0$ gilt; ist x_W die kleinste Wendestelle, so ist das Polynom auf dem Intervall (-∞, x_W) konvex, wenn für einen Punkt $x_0 \in (-\infty, x_W)$ $f''(x_0) < 0$ gilt. Ist x_W die größte Wendestelle, so ist das Polynom auf dem Intervall (x_W, ∞) konvex, wenn für einen Punkt $x_0 \in (x_W, \infty)$ $f''(x_0) > 0$ gilt; ist x_W die größte Wendestelle, so ist das Polynom auf dem Intervall (x_W, ∞) konvex, wenn für einen Punkt $x_0 \in (x_W, \infty)$ $f''(x_0) < 0$ gilt.
c) Die Intervalle zwischen den Wendepunkten heißen <u>Krümmungsintervalle</u>. Zwei angrenzende Krümmungsintervalle haben dann ein unterschiedliches Krümmungsverhalten. Es gilt also mit x_W als Wendepunkt und den Krümmungsintervallen (a, x_W) und (x_W, b) mit a, b als weitere Wendestellen oder a=-∞ oder b=∞: Ist das Polynom konvex auf (a, x_W), so konkav auf (x_W, b) und umgekehrt. Ist das Polynom konkav auf (a, x_W), so konvex auf (x_W, b) und umgekehrt.

II.22 <u>Beispiele</u>: a) Zur Funktion $f(x) = x^3(8-x) = 8x^3 - x^4$ bestimmen wir die Extrem- und Wendestellen. Es gilt bzgl. der Ableitungen: $f'(x) = 24x^2 - 4x^3$, $f''(x) = 48x - 12x^2$, $f'''(x) = 48 - 24x$. Die (möglichen) Extrema errechnen sich aus: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$ $24x^2 - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow 4x^2(6-x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 0 \vee 6 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6$ (notwendige Bedingung) mit: $f''(0) = 0$ (keine Entscheidung möglich), $f''(6) = -144 < 0$ für den Hochpunkt H(6|432) (hinreichende Bedingung). Für die Wendestellen gilt: *Notwendige Bedingung*:
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 48x - 12x^2 = 0 \Leftrightarrow 12x(4-x) = 0 \Leftrightarrow 12x = 0 \vee 4 - x = 0 \Leftrightarrow \vee x = 0 \vee x = 4$
Hinreichende Bedingung: $f'''(0) = 48 \neq 0 \Rightarrow x = 0$ als Wende- und Sattelpunkt W_1(0|0), $f'''(4) = 48 - 96 = -48 \neq 0 \Rightarrow x = 4$ als Wendepunkt W_2(4|256).
Wegen der beiden Wendepunkte ergibt sich das folgende Krümmungsverhalten der Funktion auf den Intervallen (-∞, 0), (0, 4) und (4, ∞): *f(x)* ist auf Grund des Hochpunktes bei *x*=6 im Intervall (4, ∞) konkav, daher im sich daran anschließenden Intervall (0, 4) konvex, somit im Intervall (-∞, 0) wieder konkav.

b) Gegeben sei das Polynom 5. Grades $f(x) = 3x^5 + 50x^4 - 40x^3 - 1200x^2 + 300x + 800$. Wir bestimmen die Wendepunkte mit den Ableitungen:

$f'(x) = 15x^4 + 200x^3 - 120x^2 - 2400x + 300$, $f''(x) = 60x^3 + 600x^2 - 240x - 2400$,

$f'''(x) = 180x^2 + 1200x - 240$

und vermöge der *notwendigen Bedingung*:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 60x^3 + 600x^2 - 240x - 2400 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 10x^2 - 4x - 40 = 0$ (*)

Die Polynomgleichung ist mit *x*=-10 lösbar, so dass die Polynomdivision:

$(x^3+10x^2-4x-40):(x+10) = x^2 - 4$
$\underline{-(x^3+10x^2)}$
$\quad -4x-40$
$\quad \underline{-(-4x-40)}$
$\quad 0$

zu den weiteren Umformungen führt:

(*) $\Leftrightarrow x = -10 \vee x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -10 \vee x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -10 \vee x = \pm 2$

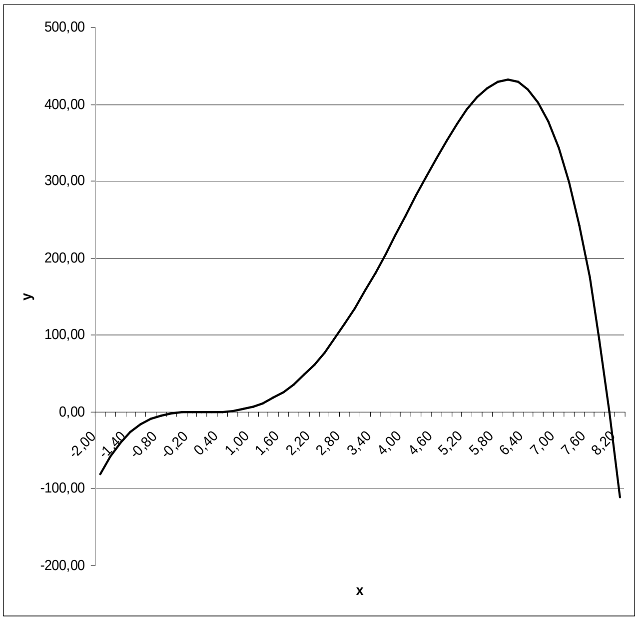
Hinreichende Bedingung: Einsetzen in die 3. Ableitung ergibt:

$f'''(-10) = 18000 - 12000 - 240 = 5750 \neq 0 \Rightarrow x = -10$ als Wendepunkt

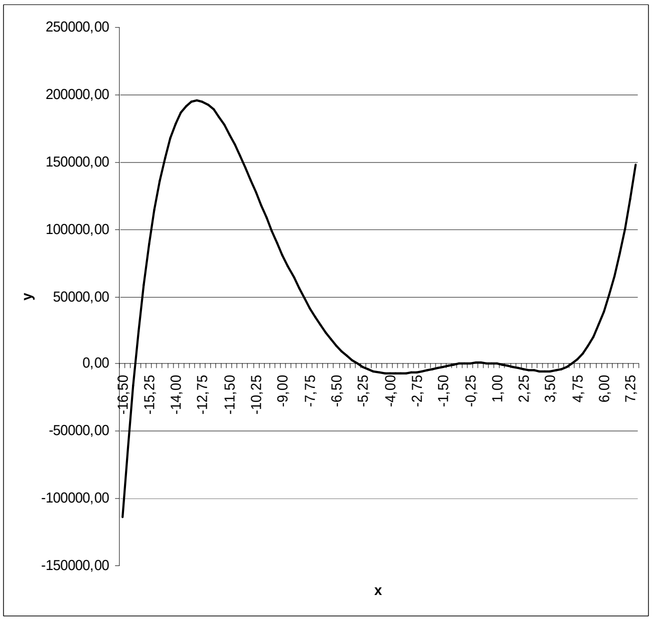
$f'''(-2) = 720 - 4800 - 240 = -4320 \neq 0 \Rightarrow x = -2$ als Wendepunkt

$f'''(2) = 720 + 4800 - 240 = 5280 \neq 0 \Rightarrow x = 2$ als Wendepunkt

Als Wendepunkte haben wir: W_1(-10|117800), W_2(-2|-3576), W_3(2|-2824).



$y = f(x) = x^3(8 - x)$



$y = f(x) = 3x^5 + 50x^4 - 40x^3 - 1200x^2 + 300x + 800$

II.23 <u>Aufgaben</u>: Bestimme die Wendepunkte der nachstehenden Polynome und untersuche auf Krümmung:

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^5$ b) $f(x) = 25x - x^3$

c) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$ d) $f(x) = (x^3 - 8)^2$

II.24 Im Zusammenhang mit den Wendepunkten greifen wir das Thema der Wendetangente noch auf. Ist f(x) differenzierbar in x_0, so können wir gemäß der Formel:

$$\text{t: } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \text{ (Tangente)}$$

die Gleichung der Tangente im Funktionspunkt P(x_0|$f(x_0)$) aufstellen. Die Gleichung der Normale in P(x_0|$f(x_0)$) lautet:

$$\text{n: } y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0) \text{ (Normale)}$$

, wobei $f(x_0) \neq 0$ gelten muss. Bei $f'(x_0)=0$ ist die Tangente $y = f(x_0)$, die Normale: $x = x_0$. Eine Wendetangente ist dann die Tangente in einem Wendepunkt der Funktion mit dem Unterschied, dass sie die Funktion nicht wie bei allen anderen $x \neq x_0$ berührt, sondern in x_0 durchschneidet. Letzteres ergibt sich aus dem Wechsel im Krümmungsverhalten der Funktion im Wendepunkt.

II.25 Beispiele: a) Zur Funktion $f(x) = x^3 + x^2$ bestimmen wir die Tangente und Normale im Punkt $x_0 = -2$. Dazu bilden wir die 1. Ableitung: $f'(x) = 3x^2 + 2x$ und erhalten weiter: $f(-2) = -8+4 = -4$, $f'(-2) = 12–4 = 8$. Wir setzen alle gefundenen Werte in obige Tangenten- bzw. Normalengleichung ein und errechnen als Tangente t und Normale n:

t: $y = 8(x-(-2)) + (-4) = 8(x+2) - 4 = 8x + 16 - 4 = 8x + 12$;

n: $y = -\frac{1}{8}(x-(-2)) + (-4) = -\frac{1}{8}(x+2) - 4 = -\frac{1}{8}x - \frac{1}{4} - 4 = -\frac{1}{8}x - \frac{17}{4}$.

b) Gegeben sei das Polynom $f(x) = x^2(x^2 - 96)$. I. Wir bestimmen zunächst die Wendepunkte von $f(x) = x^4 - 96x^2$ und errechnen dazu die Ableitungen: $f'(x) = 4x^3 - 192x$, $f''(x) = 12x^2 - 192$, $f'''(x) = 24x$. Nullsetzen der 2. Ableitung bringt: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 192 = 0 \Leftrightarrow 12x^2 = 192 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$ als mögliche Stellen für Wendepunkte. Einsetzen in die 3. Ableitung führt wegen $f'''(-4) = -96 \neq 0$ und $f'''(4) = 96 \neq 0$ in der Tat auf die Wendepunkte $W_1(-4|-1280)$ und $W_2(4|-1280)$, da $f(-4) = f(4) = 16 \cdot (-80) = -1280$ gilt.

II. Wir berechnen nun die Wendetangenten in den Wendepunkten und benötigen dazu noch die Werte der 1. Ableitungen an den Stellen $x=-4$ und $x=4$. Nun gilt diesbezüglich: $f'(-4) = -256 + 768 = 512$, $f'(4) = 256 - 768 = -512$, also $f'(-4) = -f'(4)$ wegen der Achsensymmetrie von $f(x)$ und der Punktsymmetrie der 1. Ableitung. Die Tangenten t_{-4} und t_4 in den Wendepunkten lauten nun:

t_{-4}: $y = 512(x-(-4)) + (-1280) = 512(x+4) - 1280 = 512x + 2048 - 1280 = 512x + 768$;

t_4: $y = -512(x-4) + (-1280) = -512(x-4) - 1280 = -512x + 2048 - 1280 = -512x + 768$.

II.26 Zum Verhalten für betragsmäßig große x, also für $x \to -\infty$ bzw. $x \to +\infty$, ist zu sagen, dass sich das Polynom hierbei nach der höchsten Potenz richtet. Ist also $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ die Funktionsgleichung eines Polynoms n. Grades, so ist $a_n x^n$ die höchste Potenz mit dem Koeffizienten a_n. Dann gilt die folgende Fallunterscheidung:

a) Ist n ungerade (n = 1, 3, 5, …) und $a_n > 0$, so ist:

$$x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty;\ x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty.$$

b) Ist n ungerade (n = 1, 3, 5, …) und $a_n < 0$, so ist:

$$x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty;\ x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty.$$

c) Ist n gerade (n = 2, 4, 6, …) und $a_n > 0$, so ist:

$$x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty\,;\; x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty\,.$$

d) Ist n gerade (n = 2, 4, 6, …) und $a_n < 0$, so ist:

$$x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty\,;\; x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty\,.$$

II.28 Beispiele: a) Mit $f(x) = 10x^5 - 1000x^2 + 100000$ gilt wegen der höchsten Potenz x^5 und dem positiven Koeffizienten 10:

$$x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty\,;\; x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty\,.$$

b) Das Polynom $f(x) = x^4 - 20x^3 - 100x$ hat die höchste Potenz x^4 mit dem positiven Koeffizienten 1. Damit gilt:

$$x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty\,;\; x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty\,.$$

c) Das Polynom $f(x) = 16 - x^3 - \frac{1}{8}x^4$ hat die höchste Potenz x^4 mit dem negativen Koeffizienten $-\frac{1}{8}$. Somit ist:

$$x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty\,;\; x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty\,.$$

II.29 Wir erwähnen noch die „Umkehrung“ von Kurvendiskussionen: die Bestimmungsaufgaben. Eine Funktion wird dabei auf Grund ihrer Eigenschaften bestimmt. Im Falle eines Polynoms n. Grades ergibt sich die folgende Vorgehensweise:

1) Aufstellen der allgemeinen Funktionsgleichung

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

mit n+1 unbekannten Koeffizienten a_i des Polynoms, wobei eventuell die Ableitungen

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ... + 2a_2 x + a_1\,,$$

$$f''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + ... + 2a_2$$

zu berücksichtigen sind.

2) Ermittlung der n+1 Eigenschaften der Funktion in der Form

$$f^{(k(i))}(x_i) = z_i,\ k(i) \in \{0,\dots n\},\ i=1, \dots n+1.$$

3) Aufstellen des zugehörenden linearen Gleichungssystems

$$f^{(k(1))}(x_1) = z_1,\ f^{(k(2))}(x_2) = z_2,\ \dots\ f^{(k(n+1))}(x_{n+1}) = z_{n+1}$$

4) Lösen des linearen Gleichungssystems, z.B. mit dem Gauß-Algorithmus, mit den gesuchten Koeffizienten a_i, i=0, … n, als Lösung.

5) Aufstellen der Funktionsgleichung mit Hilfe der gefundenen a_i, i=0, … n.

6) Probe für die aufgefundene Polynomfunktion, da manche Eigenschaftgleichungen $f^{(k(i))}(x_i) = z_i$ aus notwendigen Bedingungen resultieren könnten.

Aufgaben

III. Beispiele für Kurvendiskussionen

III.1 Beispiel: Gegeben ist das Polynom: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$. – Kurvendiskussion (ohne Untersuchung der Symmetrie, mit Untersuchung von Monotonie und Krümmung):

I. Definitionsbereich D_f = **R**

I. Definitionsbereich: D_f = **R**. Das Polynom ist für alle $x \in$ **R** definiert, stetig und (beliebig oft) differenzierbar.

II. Ableitungen *f'(x), f''(x), f'''(x)*

II. Ableitungen:

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$	Funktion
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$	1. Ableitung
$f''(x) = 6x - 12$	2. Ableitung
$f'''(x) = 6$	3. Ableitung

III. Nullstellen des Polynoms mit *notwendiger und hinreichender Bedingung*: $f(x) = 0$

III. Nullstellen: Geratene Nullstelle bei x=1 mit $f(1)$ = 0 und Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(x^3-6x^2+9x-4):(x-1) = x^2-5x+4 \\
\underline{-(x^3-x^2)} \\
\quad -5x^2+9x \\
\quad \underline{-(-5x^2+5x)} \\
\qquad 4x-4 \\
\qquad \underline{-(4x-4)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

ergeben beim Nullsetzen der Funktionsgleichung:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 1 \vee x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$x = 1 \vee [x = 1] \vee x = 4$$

Nullstellen der Funktion sind somit: x=1, x=4. Also: $N_1(1|0)$, $N_2(4|0)$.

IV. Extremwerte (als Nullstellen der 1. Ableitung) mit *notwendiger Bedingung*: $f'(x) = 0$ und *hinreichender Bedingung* für die x_E mit $f'(x_E) = 0$: $f''(x_E) < 0 \Rightarrow x_E$ rel. Maximum $f''(x_E) > 0 \Rightarrow x_E$ rel. Minimum

IV. Hoch- und Tiefpunkte: *Notwendige Bedingung*: Das Nullsetzen der 1. Ableitung führt zu den folgenden Gleichungsumformungen:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} = 2 \pm \sqrt{1} = 2 \pm 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$

Hinreichende Bedingung: Einsetzen der x-Werte in die 2. Ableitung ergibt:

$f''(1) = 6 - 12 = -6 < 0 \Rightarrow x = 1$ als relatives Maximum

$f''(3) = 18 - 12 = 6 > 0 \Rightarrow x = 3$ als relatives Minimum

x=1 ist relatives Maximum (Hochpunkt), x=3 relatives Minimum (Tiefpunkt) der Funktion. Somit lauten die diesbezüglichen Kurvenpunkte wegen $f(1)$ = 0 und $f(3)$ = $3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 4 = -4$: H(1|0), T(3|-4).

V. Wendepunkte (als Nullstellen der 2. Ableitung) mit *notwendiger Bedingung*: $f''(x)=0$ und *hinreichender Bedingung* für die x_W mit $f''(x_W)=0$: $f'''(x_W)\neq 0 \Rightarrow x_W$ Wendepunkt

V. <u>Wendepunkte</u>: *Notwendige Bedingung*: Nullsetzen der 2. Ableitung ergibt:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x-12=0 \Leftrightarrow 6x=12 \Leftrightarrow x=2$$

Hinreichende Bedingung: Einsetzen der x-Koordinate des potenziellen Wendepunkts in die 3. Ableitung führt auf:

$f'''(2)=6\neq 0 \Rightarrow x=2$ als Wendepunkt

Der Wendepunkt der Funktion liegt bei *x*=2. Wegen *f(2)* = $2^3-6\cdot 2^2+9\cdot 2-4$ = -2 lautet der Wendepunkt: W(2|-2).

VI. Monotonie (auf den durch die Extremwerte, -∞ und +∞ begrenzten Intervallen) mit: $f'(x)\leq 0 \Rightarrow f$ monoton steigend $f'(x)\geq 0 \Rightarrow f$ monoton fallend

VI. <u>Monotonie</u>: Wegen der Extremwerte x=1 und x=3 sind die Monotonieintervalle der Funktion mit ihren Eigenschaften:

(-∞, 1)	x=1	(1, 3)	x=3	(3, ∞)
↱ f monoton steigend	relatives Maximum	↴ ↱ f monoton fallend	relatives Minimum	↴ f monoton steigend

Also ist *f* monoton steigend auf (-∞, 1) und (3, ∞), monoton fallend auf (1, 3).

VII. Krümmung (auf den durch die Wendepunkte -∞ und +∞ begrenzten Intervallen) mit: $f''(x)\leq 0 \Rightarrow f$ konkav $f''(x)\geq 0 \Rightarrow f$ konvex

VII. <u>Krümmung</u>: Auf Grund des Wendepunktes *x*=2 sind die Krümmungsintervalle der Funktion mit ihren Eigenschaften:

(-∞, 2)	x=2	(2, ∞)
↱ f konkav ↑ *x*=1 rel. Maximum mit *f''(1)*=-6<0	Wendepunkt	↴ f konvex ↑ *x*=3 rel. Minimum mit *f''(3)*=6>0

Somit ist *f* konkav (rechtsgekrümmt) auf dem Intervall (-∞, 2), konvex (linksgekrümmt) auf dem Intervall (2, ∞).

VIII. Verhalten gegen ±∞, abhängig von der höchsten Potenz des Polynoms a_nx^n mit:
<u>a_n>0, n ung.</u>: x->∞ → *f(x)*->∞ x->-∞→ *f(x)*->-∞
<u>a_n>0, n gerade</u>: x->∞ → *f(x)*->∞ x->-∞→ *f(x)*->∞
<u>a_n<0, n ung.</u>: x->∞ → *f(x)*->-∞ x->-∞ → *f(x)*->∞
<u>a_n<0, n gerade</u>: x->∞ → *f(x)*->-∞ x->-∞→ *f(x)*->-∞

VIII. <u>Verhalten für betragsmäßig große x</u>: Der Term x^3 ist die höchste Potenz in der Polynomfunktion *f(x)* und besitzt den Koeffizienten 1. D.h., es gilt:

$$x\to\infty \Rightarrow f(x)=x^3-\ldots\to\infty$$
$$x\to-\infty \Rightarrow f(x)=x^3-\ldots\to-\infty$$

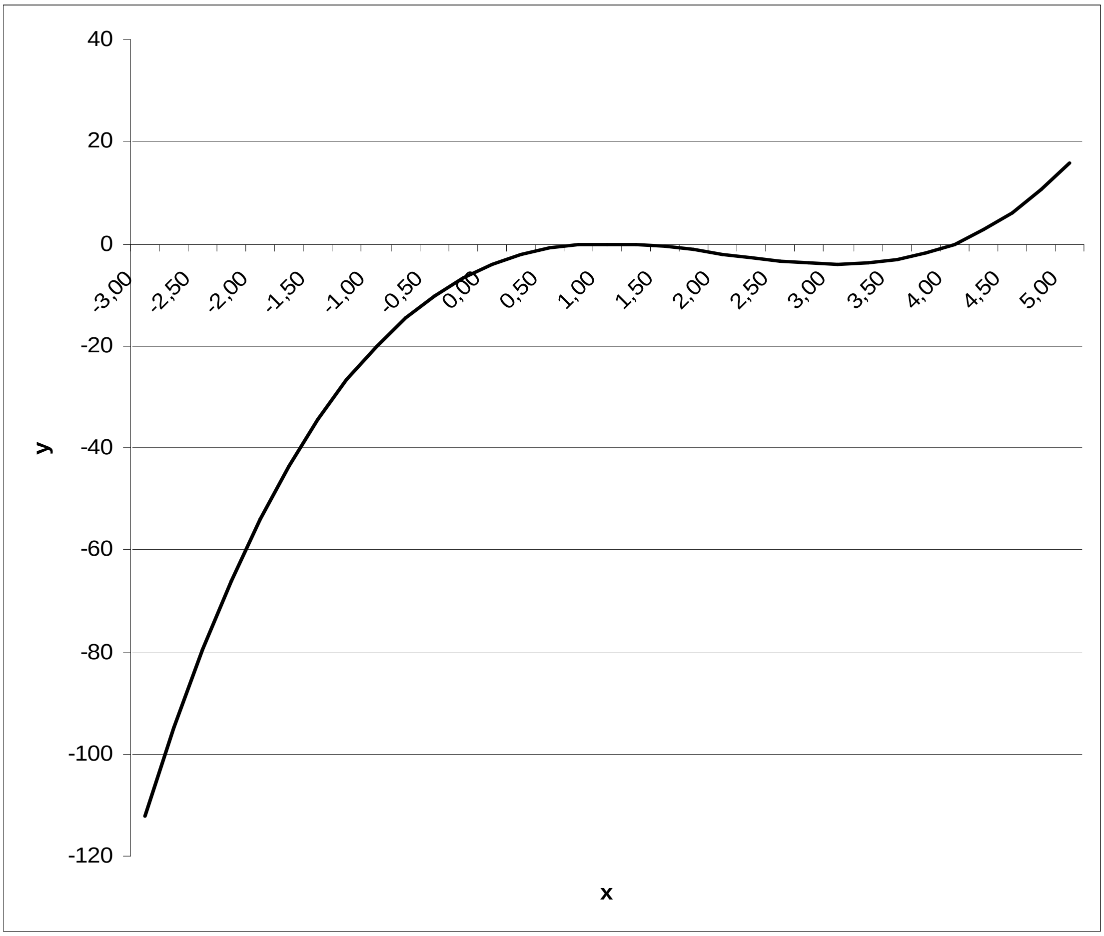
IX. Wertetabelle

IX. <u>Wertetabelle</u>:

x	-1	0	1	2	3	4	5
y = f(x)	-20	-4	0	-2	-4	0	16

X. Zeichnung im x-y-Koordinaten-system

X. Zeichnung:



III.2 Beispiel: Gegeben ist das Polynom 4. Grades mit der Funktionsvorschrift $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$. – Kurvendiskussion:

I. Definitionsbereich D_f = **R**

I. Definitionsbereich: D_f = **R**. Das Polynom ist für alle $x \in$ **R** definiert, stetig und (beliebig oft) differenzierbar.

II. Symmetrie $f(-x) = f(x)$ → *f* gerade $f(-x) = -f(x)$ → *f* ungerade

II. Symmetrie: Wegen der geraden Potenzen x^4, x^2 und -9 ist das Polynom eine gerade Funktion, mithin symmetrisch zur y-Achse. Es gilt also: $f(-x) = f(x)$.

III. Ableitungen *f'(x), f''(x), f'''(x)*

III. Ableitungen:

$f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$	Funktion
$f'(x) = 4x^3 - 16x$	1. Ableitung
$f''(x) = 12x^2 - 16$	2. Ableitung
$f'''(x) = 24x$	3. Ableitung

IV. Nullstellen des Polynoms mit *notwendiger und hinreichender Bedingung*: $f(x) = 0$

IV. Nullstellen: Mit *f(x)* = 0 liegt eine biquadratische Gleichung vor, so dass die Substitution $z = x^2$ eine quadratische Gleichung in z ergibt, die gelöst werden kann. Rücksubstitution von $x^2 = z$ und anschließendes Ziehen der Wurzel führt dann auf die Lösungen von x:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^4-8x^2-9=0 \underset{z=x^2}{\Leftrightarrow} z^2-8z-9=0 \Leftrightarrow$$

$$z=4\pm\sqrt{16+9}=4\pm\sqrt{25}=4\pm 5 \Leftrightarrow z=-1 \vee z=9 \underset{x^2=z}{\Leftrightarrow} [x^2=-1] \vee x^2=9 \Leftrightarrow$$

$$x=\pm 3$$

Nullstellen der Funktion sind somit: *x*=-3, *x*=3. Also: N_1(-3|0), N_2(3|0).

V. Extremwerte (als Nullstellen der 1. Ableitung) mit *notwendiger Bedingung*: $f'(x)=0$ und *hinreichender Bedingung* für die x_E mit $f'(x_E)=0$: $f''(x_E)<0 \Rightarrow x_E$ rel. Maximum $f''(x_E)>0 \Rightarrow x_E$ rel. Minimum

V. Hoch- und Tiefpunkte: *Notwendige Bedingung*: Wir setzen die 1. Ableitung gleich 0:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-16x=0 \Leftrightarrow 4x(x^2-4)=0 \Leftrightarrow 4x=0 \vee x^2-4=0 \Leftrightarrow$$

$$x=0 \vee x^2=4 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\pm 2$$

Hinreichende Bedingung: Wir setzen die potenziellen Hoch- und Tiefpunkte *x*=-2, *x*=0, *x*=2 in die 2. Ableitung ein und erkennen:

$f''(-2)=12\cdot(-2)^2-16=32>0 \Rightarrow x=-2$ als relatives Minimum

$f''(0)=12\cdot 0^2-16=-16<0 \Rightarrow x=0$ als relatives Maximum

$f''(2)=12\cdot 2^2-16=32>0 \Rightarrow x=2$ als relatives Minimum

Wegen *f(-2)* = *f(2)* = -25 (Symmetrie) und *f(0)* = -9 besitzt also das Polynom die zwei Tiefpunkte T_1(-2|-25), T_2(2|-25) und den Hochpunkt H(0|-9).

VI. Wendepunkte (als Nullstellen der 2. Ableitung) mit *notwendiger Bedingung*: $f''(x)=0$ und *hinreichender Bedingung* für die x_W mit $f''(x_W)=0$: $f'''(x_W)\neq 0 \Rightarrow x_W$ Wendepunkt

VI. Wendepunkte: *Notwendige Bedingung*: Nullsetzen der 2. Ableitung führt zu:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 12x^2-16=0 \Leftrightarrow 12x^2=16 \Leftrightarrow x^2=\frac{16}{12} \Leftrightarrow x^2=\frac{4}{3} \Leftrightarrow x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Hinreichende Bedingung: Einsetzen der möglichen Wendepunkte in die 3. Ableitung ergibt:

$f'''\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=24\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{48}{\sqrt{3}}\neq 0 \Rightarrow x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ als Wendepunkt

$f'''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=24\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{48}{\sqrt{3}}\neq 0 \Rightarrow x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ als Wendepunkt

Auf Grund von $f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^4-8\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-9=\frac{16}{9}-8\cdot\frac{4}{3}-9=-\frac{161}{9}$

besitzt die Funktion Wendepunkte bei: $W_1(-\frac{2}{\sqrt{3}}|-\frac{161}{9})$, $W_2(\frac{2}{\sqrt{3}}|-\frac{161}{9})$.

VII. Verhalten gegen ±∞, abhängig von der höchsten Potenz des Polynoms a_nx^n mit:
a_n>0, n ung.:
x->∞ → *f(x)*->∞
x->-∞→ *f(x)*->-∞
a_n>0, n gerade:
x->∞ → *f(x)*->∞
x->-∞→ *f(x)*->∞

VII. Verhalten für betragsmäßig große x: Der Term x^4 ist die höchste Potenz in der Polynomfunktion *f(x)* und besitzt den Koeffizienten 1. D.h., es gilt:

$$x\to\infty \Rightarrow f(x)=x^4-\ldots\to\infty$$

$$x\to-\infty \Rightarrow f(x)=x^4-\ldots\to\infty$$

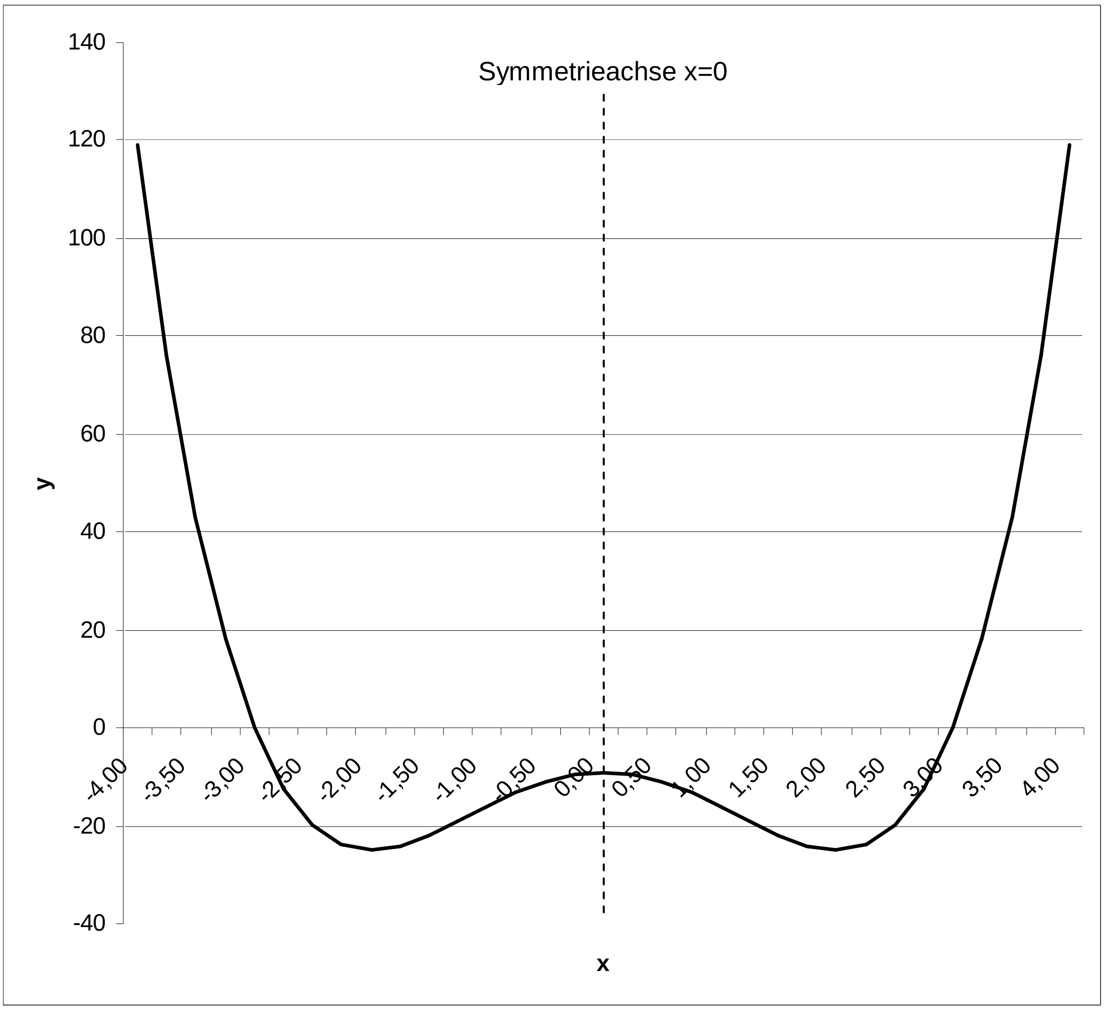
VIII. Wertetabelle

VIII. Wertetabelle: Unter Beachtung der Achsensymmetrie gilt:

x	0	±1	$\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$	±2	±3	±4	±5	±8
y = f(x)	-9	-16	$-\frac{161}{9}$	-25	0	119	416	3575

IX. Zeichnung im x-y-Koordinaten-system

IX. Zeichnung:



III.3 Gegeben ist das Polynom 4. Grades $f(x) = \frac{x^3}{2}(8-x)$. – Kurvendiskussion (mit Bestimmung der Wendetangenten und der Normalen der Wendepunkte):

I. Definitionsbereich D_f = **R**

I. Definitionsbereich: D_f = **R**. Das Polynom ist für alle $x \in$ **R** definiert, stetig und (beliebig oft) differenzierbar. – Neben der Darstellung der Funktion als Produkt verwenden wir durch Auflösen der Klammer die Darstellung:

$$f(x) = \frac{x^3}{2}(8-x) = \frac{x^3}{2} \cdot 8 - \frac{x^3}{2} \cdot x = 4x^3 - \frac{1}{2}x^4.$$

Wegen den Potenzen x^3 und x^4 ist eine (gerade oder ungerade) Symmetrie nicht erkennbar.

II. Ableitungen $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$

II. Ableitungen: Die letzte Form von *f* verwenden wir beim Ableiten:

$f(x) = 4x^3 - \frac{1}{2}x^4$	Funktion
$f'(x) = 12x^2 - 2x^3$	1. Ableitung
$f''(x) = 24x - 6x^2$	2. Ableitung
$f'''(x) = 24 - 12x$	3. Ableitung

III. <u>Nullstellen</u> des Polynoms mit *notwendiger und hinreichender Bedingung*: $f(x) = 0$

III. <u>Nullstellen</u>: Es folgt aus der Darstellung der Funktion als Produkt:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{2}(8-x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{2} = 0 \vee 8-x = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \vee 8 = x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8$$

Nullstellen der Funktion sind somit: *x*=0, *x*=8. Also: $N_1(0|0)$, $N_2(8|0)$.

IV. <u>Extremwerte</u> (als Nullstellen der 1. Ableitung) mit *notwendiger Bedingung*: $f'(x) = 0$ und *hinreichender Bedingung* für die x_E mit $f'(x_E) = 0$: $f''(x_E) < 0 \Rightarrow x_E$ rel. Maximum; $f''(x_E) > 0 \Rightarrow x_E$ rel. Minimum

IV. <u>Hoch- und Tiefpunkte</u>: *Notwendige Bedingung*: Nullsetzen der 1. Ableitung ergibt:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 2x^3 = 0 \Leftrightarrow 2x^2(6-x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 0 \vee 6-x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6$$

Hinreichende Bedingung: Einsetzen der gefundenen Werte *x*=0 und *x*=6 in die 2. Ableitung ergibt:

$f''(0) = 0 - 0 = 0 \Rightarrow x = 0$ kann weder als Minimum noch Maximum erkannt werden (siehe dazu V.)

$f''(6) = 144 - 216 = -72 < 0 \Rightarrow x = 0$ als relatives Maximum

Bei *x*=6 liegt ein relatives Maximum (Hochpunkt). Somit lautet der diesbezügliche Kurvenpunkt wegen *f(6)* = $\frac{6^3}{2}(8-6) = 6^3 = 216$: H(6|216).

V. <u>Wendepunkte</u> (als Nullstellen der 2. Ableitung) mit *notwendiger Bedingung*: $f''(x) = 0$ und *hinreichender Bedingung* für die x_W mit $f''(x_W) = 0$: $f'''(x_W) \neq 0 \Rightarrow x_W$ Wendepunkt

V. <u>Wendepunkte</u>: *Notwendige Bedingung*: Aus dem Nullsetzen der 2. Ableitung folgt:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 24x - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x(12-3x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \vee 12 - 3x = 0 \Leftrightarrow$$
$$x = 0 \vee 12 = 3x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$$

Hinreichende Bedingung: Einsetzen der x-Koordinate der potenziellen Wendepunkte in die 3. Ableitung ergibt:

$f'''(0) = 24 - 0 = 24 \neq 0 \Rightarrow x = 0$ als Wendepunkt

$f'''(4) = 24 - 48 = -24 \neq 0 \Rightarrow x = 4$ als Wendepunkt

Insbesondere liegt bei x=0 also kein Hoch- und Tiefpunkt (siehe IV.), sondern ein Wendepunkt vor, und zwar ein Sattelpunkt mit Funktionssteigung *f'(0)* gleich 0. Die Wendepunkte lauten wegen *f(0)* = 0 und *f(4)* = $\frac{4^3}{2}(8-4) = 128$: $W_1(0|0)$, $W_2(4|128)$.

VI. <u>Verhalten gegen ±∞</u>, abhängig von der höchsten Potenz des Polynoms $a_n x^n$ mit:
<u>a_n<0, n ung.</u>: x->∞ → *f(x)*->-∞; x->-∞ → *f(x)*->∞
<u>a_n<0, n gerade</u>: x->∞ → *f(x)*->-∞; x->-∞→ *f(x)*->-∞

VI. <u>Verhalten für betragsmäßig große x</u>: Der Term x^4 ist die höchste Potenz in der Polynomfunktion $f(x) = 4x^3 - \frac{1}{2}x^4$ und besitzt den negativen Koeffizienten $-\frac{1}{2}$. Damit gilt:

$$x \to \infty \Rightarrow f(x) = ... - \frac{1}{2}x^4 \to -\infty$$

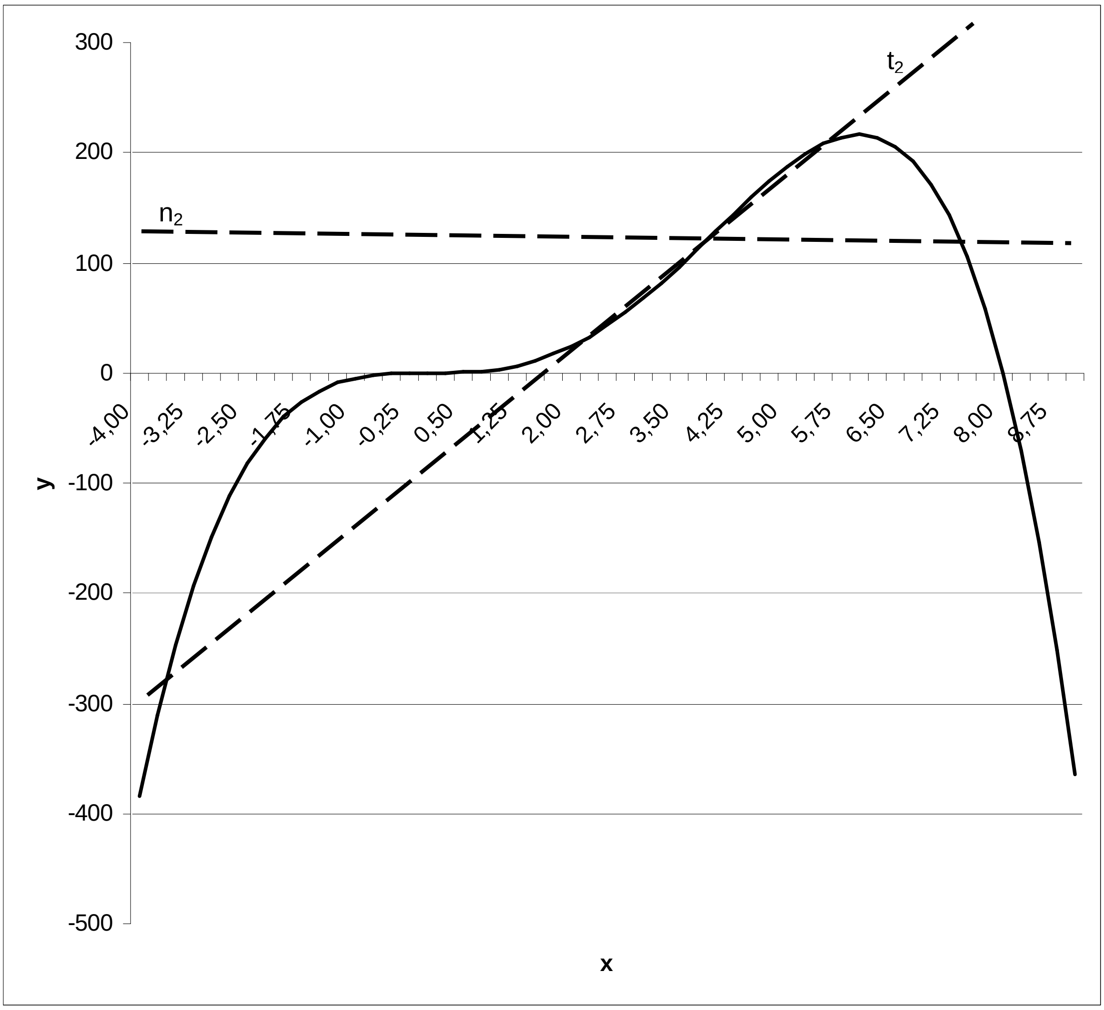
$$x \to -\infty \Rightarrow f(x) = ... - \frac{1}{2}x^4 \to -\infty$$

VII. <u>Wertetabelle</u>

VII. <u>Wertetabelle</u>:

x	|	-4	-2	-1	0	1	2	4	6	8	10
y = f(x)	|	-384	-40	-4,5	0	3,5	24	128	216	0	-1000

VIII. Zeichnung im x-y-Koordinaten-system	VIII. Zeichnung:



IX. Tangente in x_0: $t: y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$	IX. Wendetangenten: a) Im Sattelpunkt $W_1(0\|0)$ lautet wegen *f'(0)* = 0 die Wendetangente: t_1: *y* = *f(0)* = 0, ist also identisch mit der x-Achse. b) Die Steigung der Funktion *f* im Wendepunkt $W_2(4\|128)$ beträgt mit x_0=4: *f'(4)* = $12\cdot16-2\cdot64=192-128=64$, der Funktionswert an der Stelle x_0=4 ist: *f(4)* = 128. Es ergibt sich als Tangentengleichung: t_2: $y = f'(4)\cdot(x-4)+f(4)=64(x-4)+128=64x-256+128=64x-128$.
X. Normale in x_0: $n: y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) + f(x_0)$	X. Normalen der Wendepunkte: a) Für x_0=0 folgt wegen des Sattelpunkts $W_1(0\|0)$ mit *f'(0)* = 0 für die Normale n_1: *x* = 0, also die y-Achse. b) Es gilt: x_0=4, *f(4)* = 128, *f'(4)* = 64. Für die Gleichung der Normalen folgt: n_2: $y = -\frac{1}{f'(4)}(x-4)+f(4)=-\frac{1}{64}(x-4)+128=-\frac{1}{64}x+\frac{1}{16}+128=-\frac{1}{64}x+128\frac{1}{16}$.

III.4 Gegeben ist das Polynom 5. Grades $f(x)=3x^5-20x^3$. – Kurvendiskussion:

I. Definitions-bereich D_f = **R**	I. Definitionsbereich: D_f = **R**. Das Polynom ist überall stetig und differenzierbar.
II. Symmetrie $f(-x)=-f(x)$ → *f* ungerade	II. Symmetrie: Wegen der ungeraden Potenzen x^5 und x^3 ist das Polynom eine ungerade Funktion, also symmetrisch zum Ursprung mit: $f(-x)=-f(x)$.

III. Ableitungen
f'(x), f''(x), f'''(x)

III. Ableitungen:

$f(x) = 3x^5 - 20x^3$	Funktion
$f'(x) = 15x^4 - 60x^2$	1. Ableitung
$f''(x) = 60x^3 - 120x$	2. Ableitung
$f'''(x) = 180x^2 - 120$	3. Ableitung

IV. Nullstellen des Polynoms mit *notwendiger und hinreichender Bedingung*: $f(x) = 0$

IV. Nullstellen: Nullsetzen des Funktionsterms ergibt:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^5 - 20x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(3x^2 - 20) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \vee 3x^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \vee 3x^2 = 20 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = \frac{20}{3} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{\frac{20}{3}}$$

Nullstellen der Funktion sind damit: $N_1(-\sqrt{\frac{20}{3}}|0)$, $N_2(\sqrt{\frac{20}{3}}|0)$.

V. Extremwerte (als Nullstellen der 1. Ableitung) mit *notwendiger Bedingung*: $f'(x) = 0$ und *hinreichender Bedingung* für die x_E mit $f'(x_E) = 0$: $f''(x_E) < 0 \Rightarrow x_E$ rel. Maximum, $f''(x_E) > 0 \Rightarrow x_E$ rel. Minimum

V. Hoch- und Tiefpunkte: *Notwendige Bedingung*: Nullsetzen der 1. Ableitung führt auf die folgenden Gleichungsumformungen:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 15x^4 - 60x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(15x^2 - 60) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee 15x^2 - 60 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \vee 15x^2 = 60 \Leftrightarrow x = 9 \vee x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm 2$$

Hinreichende Bedingung: Einsetzen in die 2. Ableitung ergibt:

$f''(-2) = 60 \cdot (-2)^3 - 120 \cdot (-2) = -240 < 0 \Rightarrow x = -2$ als Hochpunkt

$f''(2) = 60 \cdot 2^3 - 120 \cdot 2 = 240 > 0 \Rightarrow x = 2$ als Tiefpunkt

Für x=0 ist keine Entscheidung möglich, da *f''(0)* = 0 gilt (siehe VI.). Wegen *f(2)* = $3 \cdot 2^5 - 20 \cdot 2^3 = 96 - 160 = -64$ und *f(-2)* = *-f(2)* = 64 (Symmetrie) hat das Polynom den Hochpunkt H(-2|64) und den Tiefpunkt T(2|-64).

VI. Wendepunkte (als Nullstellen der 2. Ableitung) mit *notwendiger Bedingung*: $f''(x) = 0$ und *hinreichender Bedingung* für die x_W mit $f''(x_W) = 0$: $f'''(x_W) \neq 0 \Rightarrow x_W$ Wendepunkt

VI. Wendepunkte: *Notwendige Bedingung*: Nullsetzen der 2. Ableitung führt zu:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 60x^3 - 120x = 0 \Leftrightarrow 60x(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow 60x = 0 \vee x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \vee x^2 = 2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{2}$$

Hinreichende Bedingung: Einsetzen der möglichen Wendepunkte in die 3. Ableitung ergibt:

$f'''(-\sqrt{2}) = 180 \cdot 2 - 120 = 240 \neq 0 \Rightarrow x = -\sqrt{2}$ als Wendepunkt

$f'''(0) = 180 \cdot 0 - 120 = -120 \neq 0 \Rightarrow x = 0$ als Wendepunkt

$f'''(\sqrt{2}) = 180 \cdot 2 - 120 = 240 \neq 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}$ als Wendepunkt

Auf Grund von *f(0)* = 0, $f(\sqrt{2}) = 12\sqrt{2} - 40\sqrt{2} = -28\sqrt{2}$, $f(-\sqrt{2}) = -f(\sqrt{2}) = 28\sqrt{2}$ besitzt *f(x)* die drei Wendepunkte: $W_1(-\sqrt{2}\,|\,28\sqrt{2})$, $W_2(0|0)$, $W_3(\sqrt{2}\,|-28\sqrt{2})$.

VII. Verhalten gegen $\pm\infty$, abhängig von der höchsten Potenz des Polynoms $a_n x^n$ mit: $a_n>0$, n ung.: x->∞ → *f(x)*->∞, x->-∞→ *f(x)*->-∞

VII. Verhalten für betragsmäßig große x: Der Term x^5 ist die höchste Potenz in der Polynomfunktion *f(x)* und besitzt den Koeffizienten 3. Damit gilt:

$$x \to \infty \Rightarrow f(x) = x^5 - \ldots \to \infty$$

$$x \to -\infty \Rightarrow f(x) = x^5 - \ldots \to -\infty$$

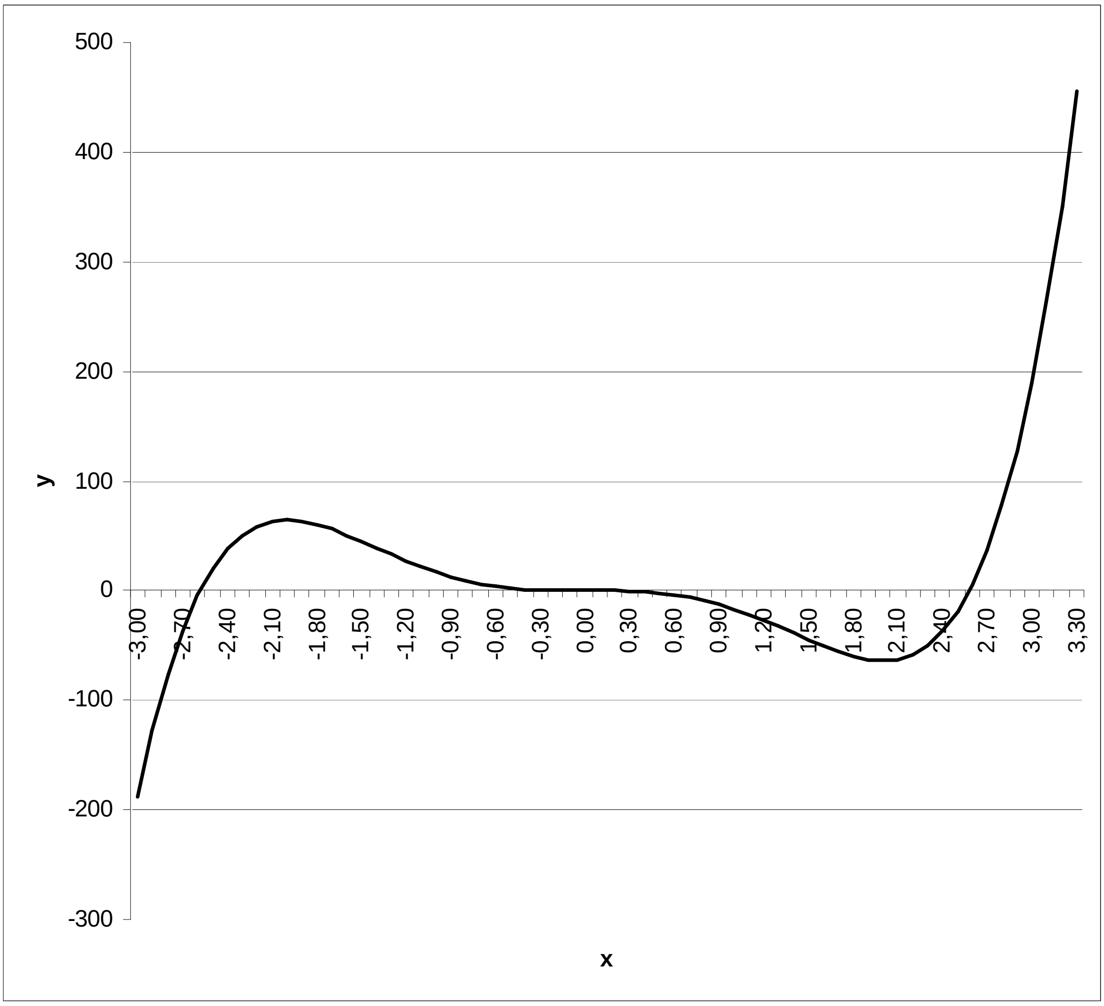
VIII. Wertetabelle

VIII. Wertetabelle: Unter Beachtung der Punktsymmetrie gilt:

x	0	± 1	$\pm\sqrt{2}$	± 2	$\pm\sqrt{\frac{20}{3}}$	± 3	± 4	± 5
$y = f(x)$	0	∓ 17	$\mp 28\sqrt{2}$	∓ 64	0	∓ 189	∓ 1792	∓ 6875

IX. Zeichnung im x-y-Koordinatensystem

IX. Zeichnung:



III.5 Gegeben ist das Polynom 4. Grades $f(x) = (x-4)^2(x^2-4)$. – Kurvendiskussion:

I. Definitionsbereich D_f = **R**

I. Definitionsbereich: D_f = **R**. Das Polynom ist überall stetig und differenzierbar.

II. Symmetrie

II. Symmetrie: Die Funktion ist ein Produkt. Da der erste Faktor (x–4) sowohl gerade als auch ungerade, der zweite Faktor (x^2–4) nur gerade Exponenten enthält, besteht das ausgerechnete Polynom aus geraden und ungeraden Potenzen. Eine Symmetrie ist mithin nicht erkennbar.

III. Ableitungen $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$

III. Ableitungen (u.a. gemäß der Produkt- und Kettenregel):

$f(x) = (x-4)^2(x^2-4)$ Funktion

$f'(x) = 2(x-4)(x^2-4) + (x-4)^2 \cdot 2x = 2(x-4)[(x^2-4) + x(x-4)] =$

$2(x-4)[x^2-4+x^2-4x] = 2(x-4)(2x^2-4x-4)$ 1. Ableitung

$f''(x) = 2 \cdot 1 \cdot (2x^2-4x-4) + 2(x-4)(4x-4) = 4x^2-8x-8+8x^2-8x-32x+32 =$

	$12x^2-48x+32$ — 2. Ableitung $f'''(x)=24x-48$ — 3. Ableitung

IV. Nullstellen des Polynoms mit *notwendiger und hinreichender Bedingung*: $f(x)=0$

IV. Nullstellen: Nullsetzen des Funktionsterms ergibt:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow (x-4)^2(x^2-4)=0 \Leftrightarrow (x-4)^2=0 \vee x^2-4=0 \Leftrightarrow x-4=0 \vee x^2=4 \Leftrightarrow$$
$$x=4 \vee x=\pm 2$$

Nullstellen der Funktion sind damit: $N_1(-2|0)$, $N_2(2|0)$, $N_3(4|0)$.

V. Extremwerte (als Nullstellen der 1. Ableitung) mit *notwendiger Bedingung*: $f'(x)=0$ und *hinreichender Bedingung* für die x_E mit $f'(x_E)=0$: $f''(x_E)<0 \Rightarrow x_E$ rel. Maximum; $f''(x_E)>0 \Rightarrow x_E$ rel. Minimum

V. Hoch- und Tiefpunkte: *Notwendige Bedingung*: Nullsetzen der 1. Ableitung führt auf:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2(x-4)(2x^2-4x-4)=0 \Leftrightarrow x-4=0 \vee 2x^2-4x-4=0 \Leftrightarrow$$
$$x=4 \vee x^2-2x-2=0 \Leftrightarrow x=4 \vee x=1\pm\sqrt{1^2+2}=1\pm\sqrt{3}$$

Hinreichende Bedingung: Einsetzen in die 2. Ableitung ergibt:

$f''(1-\sqrt{3})=12\cdot(1-\sqrt{3})^2-48\cdot(1-\sqrt{3})+32\approx 73{,}57>0 \Rightarrow x=1-\sqrt{3}$ als Tiefpunkt $T_1(1-\sqrt{3}|-77{,}57)$

$f''(1+\sqrt{3})=12\cdot(1+\sqrt{3})^2-48\cdot(1+\sqrt{3})+32\approx -9{,}57<0 \Rightarrow x=1+\sqrt{3}$ als Hochpunkt $H(1+\sqrt{3}|5{,}57)$

$f''(4)=12\cdot 4^2-48\cdot 4+32=32>0 \Rightarrow x=4$ als Tiefpunkt $T_2(4|0)$.

VI. Wendepunkte (als Nullstellen der 2. Ableitung) mit *notwendiger Bedingung*: $f''(x)=0$ und *hinreichender Bedingung* für die x_W mit $f''(x_W)=0$: $f'''(x_W)\neq 0 \Rightarrow x_W$ Wendepunkt

VI. Wendepunkte: *Notwendige Bedingung*: Nullsetzen der 2. Ableitung führt zu:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 12x^2-48x+32=0 \Leftrightarrow x^2-4x+\frac{8}{3}=0 \Leftrightarrow$$
$$x=2\pm\sqrt{2^2-\frac{8}{3}}=2\pm\sqrt{\frac{4}{3}}=2\pm\frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x\approx 0{,}85 \vee x\approx 3{,}15$$

Hinreichende Bedingung: Einsetzen der möglichen Wendepunkte in die 3. Ableitung ergibt:

$f'''(0{,}85)=24\cdot 0{,}85-48=-27{,}6\neq 0 \Rightarrow x=0{,}85$ als Wendepunkt

$f'''(3{,}15)=24\cdot 3{,}15-48=27{,}6\neq 0 \Rightarrow x=3{,}15$ als Wendepunkt

f(x) besitzt die zwei Wendepunkte: $W_1(0{,}85|-32{,}52)$, $W_2(3{,}15|4{,}28)$.

VII. Verhalten gegen $\pm\infty$, abhängig von der höchsten Potenz des Polynoms a_nx^n mit: $a_n>0$, n ung.: $x\to\infty \to f(x)\to\infty$, $x\to-\infty \to f(x)\to-\infty$

VII. Verhalten für betragsmäßig große x: Würden wir die Funktion ausmultiplizieren, so wäre das Polynom von der Form $f(x) = x^4 + \ldots$ Der Term x^4 ist die höchste Potenz in *f(x)* mit geradem Exponenten und besitzt den positiven Koeffizienten 1. Damit gilt:

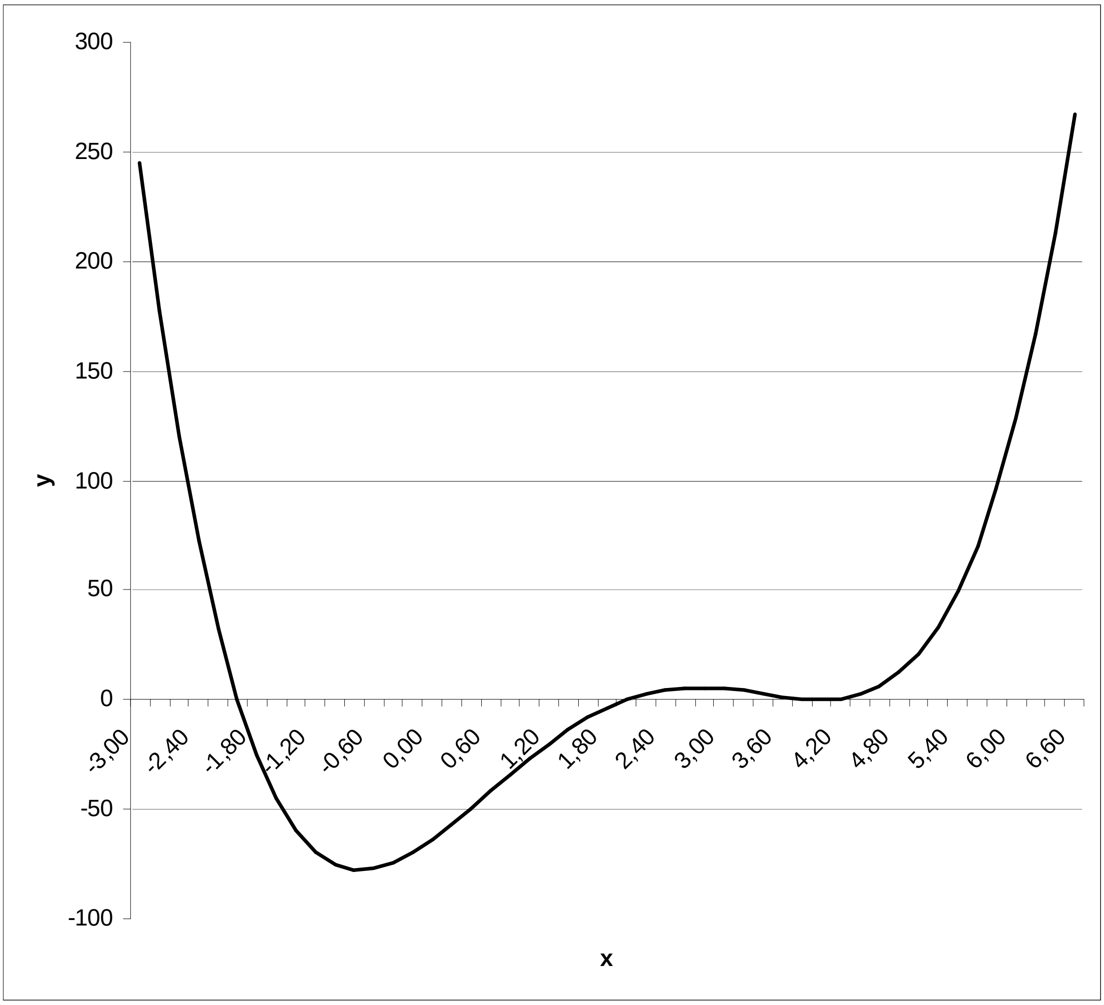
$$x\to\infty \Rightarrow f(x)=x^4+\ldots\to\infty$$
$$x\to-\infty \Rightarrow f(x)=x^4+\ldots\to\infty$$

VIII. Wertetabelle

VIII. Wertetabelle: Es gilt:

x	-3	-2	$1-\sqrt{3}$	-1	-0	0,85	1	2	$1+\sqrt{3}$
y = f(x)	111,96	0	-77,57	-75	-64	-32,52	-27	0	5,57

x	3	4	5	6	8
y = f(x)	5	0	21	128	960

IX. Zeichnung im x-y-Koordinaten-system	IX. Zeichnung: 

III.6 Gegeben ist das Polynom 6. Grades $f(x) = (x^2 - x - 2)^3$. – Kurvendiskussion:

I. Definitions-bereich D_f = **R**	I. Definitionsbereich: D_f = **R**. Das Polynom ist überall stetig und differenzierbar.
II. Symmetrie	II. Symmetrie: Die Funktion ist die Potenz des Polynoms $y = x^2 - x - 2$, das gerade und ungerade Exponenten enthält. Daher ist eine Symmetrie nicht erkennbar, obwohl – siehe die Zeichnung – *f(x)* achsensymmetrisch zur Achse *x* = 0,5 ist.
III. Ableitungen *f'(x), f''(x), f'''(x)*	III. Ableitungen (u.a. gemäß der Produkt- und Kettenregel):

$f(x) = (x^2 - x - 2)^3$ Funktion

$f'(x) = 3(x^2 - x - 2)^2(2x-1)$ 1. Ableitung

$f''(x) = 3 \cdot 2(x^2 - x - 2)(2x-1)(2x-1) + 3(x^2 - x - 2) \cdot 2 =$

$6(x^2 - x - 2)[(2x-1)^2 + 1]$ 2. Ableitung

$f'''(x) = 6(2x-1)[(2x-1)^2 + 1] + 6(x^2 - x - 2) \cdot 2(2x-1) \cdot 2 =$

$6(2x-1)[(2x-1)^2 + 1 + 4(x^2 - x - 2)] = 6(2x-1)[4x^2 - 4x + 1 + 1 + 4x^2 - 4x - 8 =$

$6(2x-1)(8x^2 - 8x - 6) = 12(2x-1)(4x^2 - 4x - 3)$ 3. Ableitung

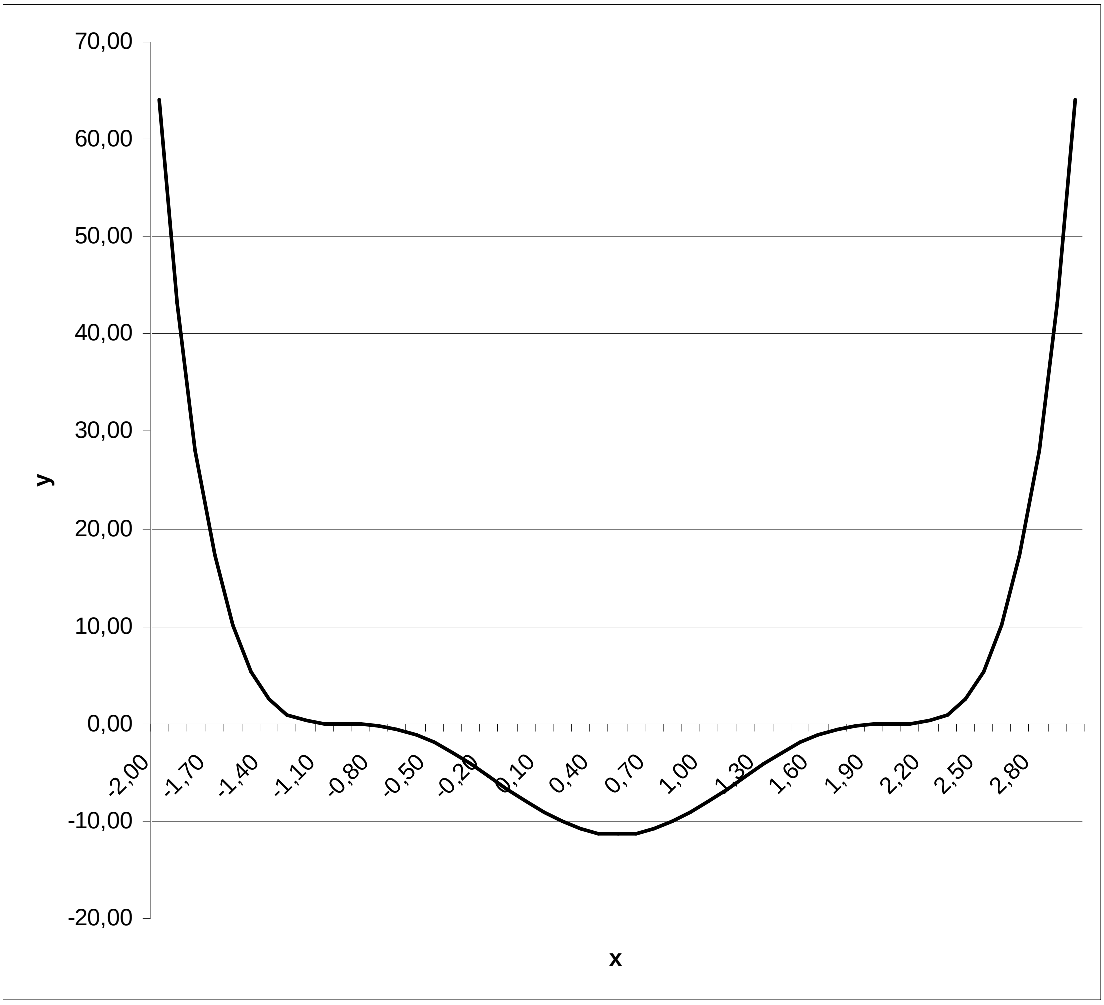
IV. Nullstellen des Polynoms mit *notwendiger und hinreichender Bedingung*: $f(x)=0$	IV. Nullstellen: Nullsetzen des Funktionsterms ergibt: $f(x)=0 \Leftrightarrow (x^2-x-2)^3=0 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2} \Leftrightarrow$ $x=-1 \vee x=2$ Nullstellen der Funktion sind damit: N_1(-1|0), N_2(2|0).
V. Extremwerte (als Nullstellen der 1. Ableitung) mit *notwendiger Bedingung*: $f'(x)=0$ und *hinreichender Bedingung* für die x_E mit $f'(x_E)=0$: $f''(x_E)<0 \Rightarrow x_E$ rel. Maximum $f''(x_E)>0 \Rightarrow x_E$ rel. Minimum	V. Hoch- und Tiefpunkte: *Notwendige Bedingung*: Nullsetzen der 1. Ableitung führt unter Beachtung der Umformungen in IV. zu: $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3(x^2-x-2)^2(2x-1)=0 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \vee 2x-1=0 \Leftrightarrow$ $x=-1 \vee x=2 \vee x=\frac{1}{2}$ *Hinreichende Bedingung*: Einsetzen der kritischen Stellen in die 2. Ableitung ergibt auf Grund von $y=x^2-x-2$ mit *y*(-1) = 0 und *y*(2) = 0: $f''(-1)=0 \Rightarrow$ bei *x* = -1 ist keine Entscheidung auf eine Extremstelle möglich $f''(0{,}5)=6\cdot(0{,}25-0{,}5-2)^2\cdot(0^2+1)=30{,}375>0 \Rightarrow$ *x* = 0,5 als Tiefpunkt $f''(2)=0 \Rightarrow$ bei *x* = 2 ist keine Entscheidung auf eine Extremstelle möglich Wir haben damit zunächst T(0,5|-11,39) als Tiefpunkt von *f(x)* erkannt.
VI. Wendepunkte (als Nullstellen der 2. Ableitung) mit *notwendiger Bedingung*: $f''(x)=0$ und *hinreichender Bedingung* für die x_W mit $f''(x_W)=0$: $f'''(x_W)\neq 0 \Rightarrow x_W$ Wendepunkt	VI. Wendepunkte: *Notwendige Bedingung*: Nullsetzen der 2. Ableitung führt wegen $(2x-1)^2+1>0$ und dadurch möglicher Division mit diesem Term sowie unter Beachtung der Umformungen in IV. zu: $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6(x^2-x-2)[(2x-1)^2+1]=0 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=2$ *Hinreichende Bedingung*: Einsetzen der möglichen Wendepunkte in die 3. Ableitung ergibt: $f'''(-1)=12\cdot(-3)\cdot 5=-180\neq 0 \Rightarrow x=-1$ als Wendepunkt $f'''(2)=12\cdot 3\cdot 5=180\neq 0 \Rightarrow x=2$ als Wendepunkt *f(x)* besitzt die zwei Wendepunkte: W_1(-1|0), W_2(2|0). Die Wendepunkte sind zudem Nullstellen der Funktion (IV.) und weiter Sattelpunkte wegen *f'*(-1) = 0 und *f'*(2) = 0.
VII. Verhalten gegen $\pm\infty$, abhängig von der höchsten Potenz des Polynoms a_nx^n mit: $a_n>0$, n ung.: x->∞ → *f(x)*->∞ x->-∞→ *f(x)*->-∞	VII. Verhalten für betragsmäßig große x: Würden wir die Funktion ausmultiplizieren, so wäre das Polynom von der Form *f(x)* = x^6 + … Der Term x^6 ist die höchste Potenz in *f(x)* mit geradem Exponenten und besitzt den positiven Koeffizienten 1. Damit gilt: $x\to\infty \Rightarrow f(x)=x^6+\ldots\to\infty$ $x\to-\infty \Rightarrow f(x)=x^6+\ldots\to\infty$
VIII. Wertetabelle	VIII. Wertetabelle: Es gilt:

x	-4	-3	-2	-1	0	0,5	1	2
y = f(x)	5832	1000	64	0	-8	-11,39	-8	0

x	3	4	5	6
y = f(x)	63	1000	5832	21952

IX. Zeichnung im x-y-Koordinatensystem

IX. Zeichnung:



IV. Aufgaben zu Kurvendiskussionen

IV.1 Aufgaben: Untersuche die folgenden Polynomfunktionen auf: Symmetrie, Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte, Wendepunkte, Verhalten für betragsmäßig große x. Erstelle im x-y-Koordinatensystem eine Zeichnung der Funktion.

a) $f(x) = 3x^2 + 12x - 96$

b) $f(x) = x^2(x-8)$

c) $f(x) = x^3 - 18x^2 + 33x$

d) $f(x) = (x^2 - 16)(x^2 + 8)$

e) $f(x) = \frac{3}{5}x^5 + x^3 - 6x$

f) $f(x) = x^5 - 25x^3 + 144x$

IV.2 Aufgaben: Untersuche die folgenden Polynomfunktionen auf: Symmetrie, Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte, Wendepunkte, Verhalten für betragsmäßig große x. Erstelle im x-y-Koordinatensystem eine Zeichnung der Funktion.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

b) $f(x) = x^4 - \frac{16}{3}x^3 + 8x^2$

c) $f(x) = (x^2 - 10)(x+1)^2$

d) $f(x) = -x^3 - \frac{1}{2}x^4$

e) $f(x) = -\frac{1}{6} \cdot \left(x - \frac{1}{3}x^2 \right)^2$ f) $f(x) = x^3(x+6)^2$

IV.3 <u>Aufgaben</u>: Ermittle die Wendetangenten und Wendenormalen der folgenden Polynome:

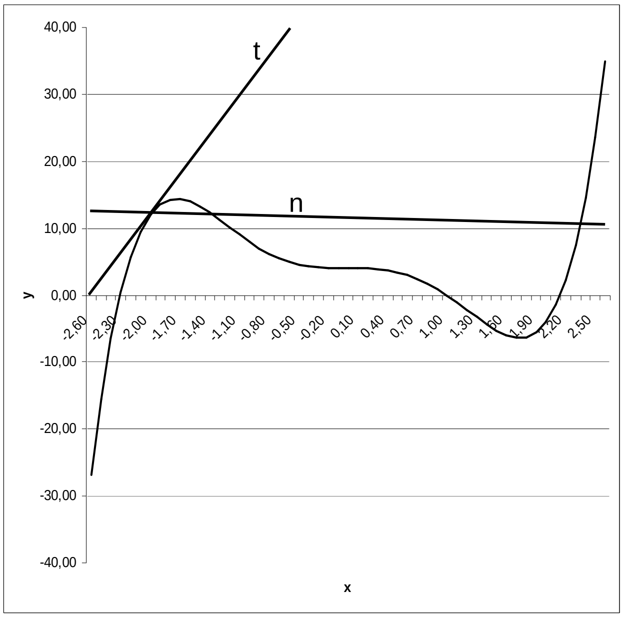
a) $f(x) = \frac{x^3}{8} + x$ b) $f(x) = 4x^3 - 2x^4$

c) $f(x) = x^5 + 80x^2$ d) $f(x) = (2x^2 + 12x - 105)x^4$

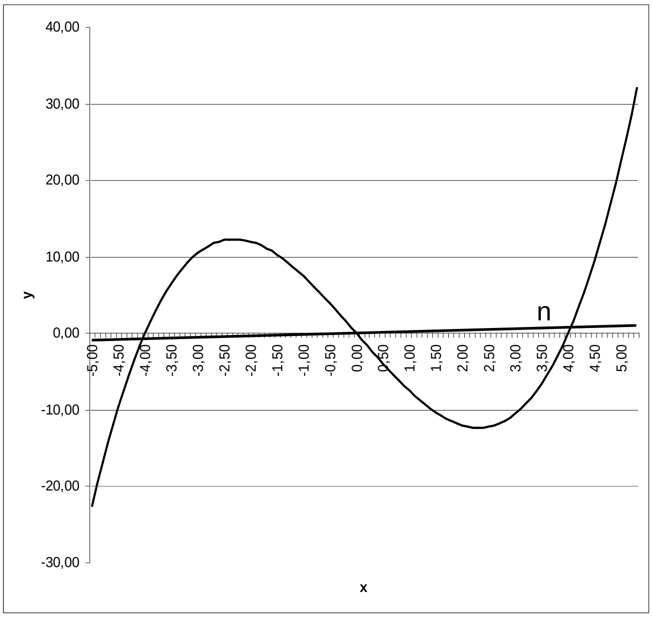
IV.4 <u>Aufgaben</u>: a) Wie lauten Tangente und Normale zur Funktion $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4$ im Punkt x_0=-2?

b) Berechne die Tangenten an den Extremstellen des Polynoms $f(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 16$.

c) Wo schneidet die Normale im (einzigen) Wendepunkt der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 8x$ dieses Polynom?



$y = f(x) = x^5 - 5x^3 + 4$



$y = f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 8x$

IV.5 <u>Aufgaben</u>: a) 1. Gesucht ist ein Polynom *f(x)* dritten Grades mit folgenden Eigenschaften: *f(x)* besitzt Nullstellen bei *x*=-1 und *x*=3; *f(x)* hat einen Tiefpunkt bei *x*=$\frac{5}{3}$; *f(x)* schneidet die *y*-Achse bei *y*=-3.

b) Ein biquadratisches Polynom *f(x)* besitzt an der Nullstelle *x*=2 einen Tiefpunkt und im Punkt *x*=1 die Steigung -48.

Lösungen

I.6 Als <u>Ableitungen</u> ergeben sich:

a) $f(x)=90$: $f'(x)=f''(x)=f'''(x)=0$

b) $f(x)=\frac{7x+5}{4}=\frac{7}{4}x+\frac{5}{4}$: $f'(x)=\frac{7}{4}$, $f''(x)=f'''(x)=0$

c) $f(x)=5x^2-12x+89$: $f'(x)=10x-12$, $f''(x)=10$, $f'''(x)=0$

d) $f(x)=6x^4-2x^3+18x-4$: $f'(x)=24x^3-6x^2+18$, $f''(x)=72x^2-12x$, $f'''(x)=144x-12$

e) $f(x)=(x+3)(x^2-9)=x^3+3x^2-9x-27$: $f'(x)=3x^2+6x-9$, $f''(x)=6x+6$, $f'''(x)=6$

f) $f(x)=(x^2-7x+8)(2-4x^2)$: $f'(x)=(2x-7)(2-4x^2)+(x^2-7x+8)(-8x^2)=$ $4x-8x^3-14+28x^2-8x^4+56x^3-64x^2=-8x^4+48x^3-36x^2+4x-14$ (u.a. nach der Produktregel), $f''(x)=-32x^3+144x^2-72x+4$, $f'''(x)=-96x^2+288x-72$

g) $f(x)=\frac{x+2}{3}(x^2+x^3-1)$: $f'(x)=\frac{1}{3}\cdot(x^2+x^3-1)+\frac{x+2}{3}(2x+3x^2)=$ $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x^2+x^3+\frac{4}{3}x+2x^2=\frac{4}{3}x^3+3x^2+\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ (u.a. nach der Produktregel), $f''(x)=4x^2+6x+\frac{4}{3}$, $f'''(x)=8x+6$

h) $f(x)=\frac{2x-3}{7}-\frac{x\ \ +4x}{9}=\frac{2}{7}x-\frac{3}{7}-\frac{1}{9}x^2-\frac{4}{9}x=-\frac{1}{9}x^2-\frac{10}{63}x-\frac{3}{7}$: $f'(x)=-\frac{2}{9}x^5-\frac{10}{63}$, $f''(x)=-\frac{10}{9}x^4$, $f'''(x)=-\frac{40}{9}x^3$

i) $f(x)=(x^2+8x-17)^2$: $f'(x)=2(x^2+8x-17)^1(2x+8)=4(x+4)(x^2+8x-17)$ (nach der Kettenregel), $f''(x)=4\cdot1\cdot(x^2+8x-17)+4(x+4)(2x+8)=4(x^2+8x-17)+8(x+4)^2=$ $4x^2+32x-68+8x^2+64x+128=12x^2+96x+60$, $f'''(x)=24x+96$

j) $f(x)=\frac{1}{8}(x^5-4x+16)-\frac{2}{3}(x^4+3x+15)=\frac{1}{8}x^5-\frac{1}{2}x+2-\frac{2}{3}x^4-2x-10=\frac{1}{8}x^5-\frac{2}{3}x^4-\frac{5}{2}x-8$: $f'(x)=\frac{5}{8}x^4-\frac{8}{3}x^3-\frac{5}{2}$, $f''(x)=\frac{5}{2}x^3-8x^2$, $f'''(x)=\frac{15}{2}x^2-16x$

I.9 Die gesuchten <u>Ableitungen</u> lauten:

a) $f(x)=(2x+67)^5$: $f'(x)=5(2x+67)^4\cdot2=10(2x+67)^4$, $f''(x)=40(2x+67)^3\cdot2=$ $80(2x+67)^3$, $f'''(x)=240(2x+67)^2\cdot2=480(2x+67)^2$ (laut der Kettenregel).

b) $f(x)=(x-1)^2(x+2)$: $f'(x)=2(x-1)(x+2)+(x-1)^2\cdot1=(x-1)[2(x+2)+(x-1)]=$ $(x-1)(3x+1)=3x^2+x-3x-1=3x^2-2x-1$ (nach Ketten- und Produktregel), $f''(x)=6x-2$, $f'''(x)=6$.

c) $f(x)=x^3(x+4)^2$: Laut der Produktregel für zwei und drei Faktoren gilt:
$f'(x)=3x^2(x+4)^2+x^3\cdot2(x+4)\cdot1=x^2(x+4)[3(x+4)+2x]=x^2(x+4)(5x+12)$,
$f''(x)=2x(x+4)(5x+12)+x^2\cdot1\cdot(5x+12)+x^2(x+4)\cdot5=$

$x[2(x+4)(5x+12)+x(5x+12)+5x(x+4)]=x(20x^2+72x+60)=4x(5x^2+18x+15)$,
$f''(x)=4(5x^2+18x+15)+4x(10x+18)=20x^2+72x+60+40x^2+72x=60x^2+144x+60$.

d) $f(x)=(x^2+4)(x-3x^2)$: Wir wenden die Produktregel für Ableitungen an:
$f'(x)=2x(x-3x^2)+(x^2+4)(1-6x)=2x^2-6x^3+x^2-6x^3+4-24x=-12x^3+3x^2-24x+4$,
$f''(x)=-36x^2+6x-24$, $f'''(x)=-72x+6$.

e) $f(x)=\left[x^2-(2x+4)^3\right]^5$: Wir wenden die Kettenregel an und danach die Produktregel:
$f'(x)=5\left[x^2-(2x+4)^3\right]^4\cdot(2x-3(2x+4)^2\cdot 2)=10\left[x^2-(2x+4)^3\right]^4(x-3(2x+4)^2)$,
$f''(x)=40\left[x^2-(2x+4)^3\right]^3(2x-3(2x+4)^2\cdot 2)(x-3(2x+4)^2)+10\left[x^2-(2x+4)^3\right]^4(1-6(2x+4)\cdot 2)=$
$80\left[x^2-(2x+4)^3\right]^3(x-3(2x+4)^2)^2+10\left[x^2-(2x+4)^3\right]^4(-24x-47)=$
$10\left[x^2-(2x+4)^3\right]^3\left[8(x-3(2x+4)^2)^2-(x^2-(2x+4)^3)(24x+47)\right]$,
$f'''(x)=120(2x+6(2x+4)^2)^4[x^2-(2x+4)^3]+360(2-24(2x+4))(2x-6(2x+4)^2)^2[x^2-(2x+4)^3]^2$
$+60(2-24(2x+4))^2[x^2-(2x+4)^3]^3-3840(2x-6(2x+4)^2[x^2-(2x+4)^3]^3$

f) $f(x)=(x+5)(4x-12)^2(5x+10)^2$: Die Produktregel für drei Faktoren ergibt:
$f'(x)=1\cdot(4x-12)^2(5x+10)^2+(x+5)\cdot 2(4x-12)\cdot 4\cdot(5x+10)^2+(x+5)(4x-12)^2\cdot 2\cdot(5x+10)\cdot 5=$
$(4x-12)^2(5x+10)^2+8(x+5)(4x-12)(5x+10)^2+10(x+5)(4x-12)^2(5x+10)=...=$
$2000x^4+4800x^3-25200x^2-34400x+38400$,
$f''(x)=8000x^3+14400x^2-50400x-34400$, $f'''(x)=24000x^2+28800x-50400$.

II.9 Wir berechnen die Nullstellen der jeweiligen Polynome:

a) $f(x)=3x-7$: $f(x)=0 \Leftrightarrow 3x-7=0 \Leftrightarrow 3x=7 \Leftrightarrow x=\frac{7}{3}$ als Nullstelle N($\frac{7}{3}$|0).

b) $f(x)=x^2+15x-364$: Wir wenden die p-q-Formel an:
$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+15x-364=0 \Leftrightarrow x=-\frac{15}{2}\pm\sqrt{\frac{225}{4}+364}=-\frac{15}{2}\pm\sqrt{\frac{1681}{4}}=-\frac{15}{2}\pm\frac{41}{2} \Leftrightarrow$$
$x=-28 \vee x=13$. Wir erhalten die Nullstellen: N_1(-28|0), N_2(13|0).

c) $f(x)=10x^2-11x+6$: Nach der „Mitternachtsformel“ gilt:
$$f(x)=0 \Leftrightarrow 10x^2-11x+6=0 \Leftrightarrow \left[x=\frac{11\pm\sqrt{121-4\cdot 10\cdot 6}}{2\cdot 10}=\frac{11\pm\sqrt{-119}}{2\cdot 10}\right]$$
Die Parabel *f(x)* besitzt keine Nullstellen.

d) $f(x)=x^2(2x+17)$: Ein Produkt ist gleich 0, wenn einer der Faktoren gleich 0 ist. Somit nutzen wir die Darstellung von *f(x)* als Produkt aus:
$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2(2x+17)=0 \Leftrightarrow x^2=0 \vee 2x+17=0 \Leftrightarrow x=0 \vee 2x=-17 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-\frac{17}{2}$$
Die zwei Nullstellen des Polynoms sind: $N_1(-\frac{17}{2}|0)$, $N_2(0|0)$.

e) $f(x)=(3x+4)(9x^2-25)$: Aus dem Funktionsterm als Produkt folgt:
$$f(x)=0 \Leftrightarrow (3x+4)(9x^2-25)=0 \Leftrightarrow 3x+4=0 \vee 9x^2-25=0 \Leftrightarrow 3x=-4 \vee 9x^2=25 \Leftrightarrow$$
$$x=-\frac{4}{3} \vee x^2=\frac{25}{9} \Leftrightarrow x=-\frac{4}{3} \vee x=\pm\sqrt{\frac{25}{9}}=\pm\frac{5}{3}$$
Die drei Nullstellen der Funktion lauten: $N_1(-\frac{5}{3}|0)$, $N_2(-\frac{4}{3}|0)$, $N_3(\frac{5}{3}|0)$.

f) $f(x) = x^3 + 81x$: Wir klammern das in beiden Summanden vorhandene *x* aus:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 81x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 81) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + 81 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee [x^2 = -81] \Leftrightarrow x = 0$$

Einzige Nullstelle von *f(x)* ist: N(0|0).

g) $f(x) = 3x^3 - 192$: Hier ziehen wir in der Gleichung die dritte Wurzel:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^3 - 192 = 0 \Leftrightarrow 3x^3 = 192 \Leftrightarrow x^3 = 64 \Leftrightarrow x = 4$ mit Nullstelle N(4|0).

h) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 4$: Wir raten bei $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 4 = 0$ die Nullstelle *x*=1 und führen die folgende Polynomdivision durch:

$$\begin{aligned}
&(x^3-4x^2+7x-4):(x-1) = x^2 - 3x + 4 \\
&\underline{-(x^3-x^2)} \\
&\quad -3x^2+7x \\
&\quad \underline{-(-3x^2+3x)} \\
&\qquad\quad 4x-4 \\
&\qquad\quad \underline{-(4x-4)} \\
&\qquad\quad 0
\end{aligned}$$

Wir haben damit die Gleichungsumformungen:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 7x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x^2 - 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee \left[x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 4} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{7}{4}} \right]$$

Einzig N(1|0) ist Nullstelle des Polynoms 3. Grades.

i) $f(x) = 4x^4 - 265x^2 + 576$: Wir lösen die biquadratische Gleichung mit *z*=x^2 und „Mitternachtsformel“:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^4 - 265x^2 + 576 = 0 \underset{z=x^2}{\Leftrightarrow} 4z^2 - 265z + 576 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{265 \pm \sqrt{70225 - 4 \cdot 4 \cdot 576}}{2 \cdot 4} \Leftrightarrow$$

$$z = \frac{265 \pm \sqrt{61009}}{8} = \frac{265 \pm 247}{8} \Leftrightarrow z = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} \vee z = \frac{512}{8} = 64 \underset{x^2=z}{\Leftrightarrow} x^2 = \frac{9}{4} \vee x^2 = 64 \Leftrightarrow x = \pm\frac{3}{2} \vee x = \pm 8$$

Wir erhalten damit die vier Nullstellen: $N_1(-8|0)$, $N_2(-\frac{3}{2}|0)$, $N_3(\frac{3}{2}|0)$, $N_4(8|0)$.

j) $f(x) = \frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}$: Es liegt wiederum eine biquadratische Gleichung vor:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x^4 + 4x^2 - 12 = 0 \underset{z=x^2}{\Leftrightarrow} z^2 + 4z - 12 = 0 \Leftrightarrow z = -2 \pm \sqrt{4 + 12} \Leftrightarrow$$

$$z = -2 \pm \sqrt{16} = -2 \pm 4 \Leftrightarrow z = -6 \vee z = 2 \underset{x^2=z}{\Leftrightarrow} [x^2 = -6] \vee x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Die zwei gefundenen Nullstellen sind: $N_1(-\sqrt{2}|0)$, $N_2(\sqrt{2}|0)$.

k) $f(x) = x^5 + 5x^4 - 15x^3 - 85x^2 - 26x - 120$: Wir raten die Nullstelle *x*=1 und führen eine Polynomdivision durch:

$$(x^5 + 5x^4 - 15x^3 - 85x^2 - 26x - 120) : (x - 1) = x^4 + 6x^3 - 9x^2 - 94x - 120$$

Das Raten der weiteren Nullstelle *x*=-2 ergibt die Polynomdivision:

$$(x^4 + 6x^3 - 9x^2 - 94x - 120) : (x + 2) = x^3 + 4x^2 - 17x - 60$$

Wir raten nochmals mit der Nullstelle *x*=-3 und erhalten:

$$(x^3 + 4x^2 - 17x - 60) : (x + 3) = x^2 + x - 20$$

Die quadratische Gleichung lösen wir wie folgt:

$$x^2 + x - 20 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 20} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{20{,}25} = -\frac{1}{2} \pm 4{,}5 \Leftrightarrow x = -5 \vee x = 4$$

Die Nullstellen des Polynoms sind also: $N_1(-5|0)$, $N_2(-3|0)$, $N_3(-2|0)$, $N_4(1|0)$, $N_5(4|0)$.

l) $f(x) = x^6 - x^3 - 12$: Es liegt mit $f(x) = x^6 - x^3 - 12 = 0$ eine triquadratische Gleichung vor, so dass die Substitution $z=x^3$ angebracht erscheint:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^6 - x^3 - 12 = 0 \underset{z=x^3}{\Leftrightarrow} z^2 - z - 12 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+12} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{7}{2} \Leftrightarrow$$

$$z = -3 \vee z = 4 \underset{x^3=z}{\Leftrightarrow} [x^2 = -3] \vee x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Die Nullstellen von *f(x)* sind: $N_1(-2|0)$, $N_2(2|0)$.

II.16 Bzgl. der Extremstellen folgender Funktionen gilt:

a) $f(x) = 34x - 129$: Wegen $f'(x) = 34 \neq 0$ gibt es keine Extrema bei der Geraden. D.h.: Die Gerade ist überall monoton steigend auf Grund von $f'(x) = 34 > 0$.

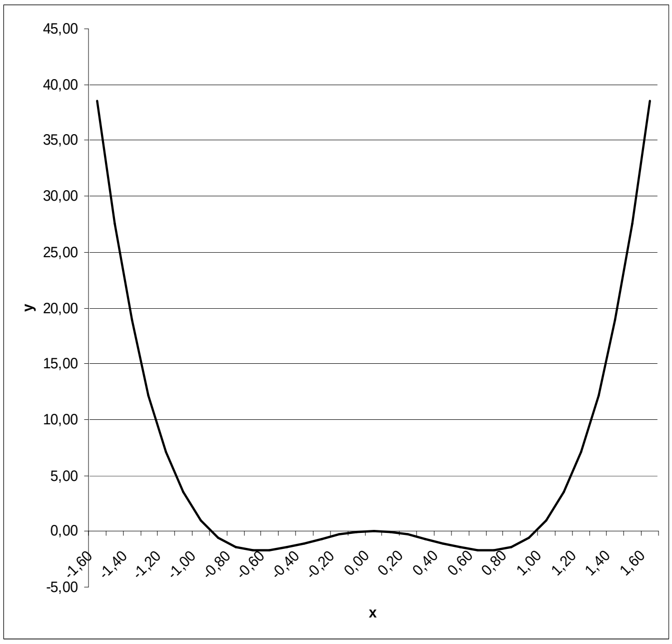
b) $f(x) = \frac{1}{5}x^2 - x - \frac{2}{7}$ hat als Parabel 2. Ordnung ein Minimum als Scheitelpunkt. Wir errechnen: $f'(x) = \frac{2}{5}x - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{5}x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$ (notwendige Bedingung) mit: $f''(x) = \frac{2}{5}$ und $f''(\frac{5}{2}) = \frac{2}{5} > 0$ (hinreichende Bedingung), so dass $T(\frac{5}{2}|-\frac{43}{28})$ der einzige Tiefpunkt der Parabel ist. Wegen des Tiefpunktes T ist *f(x)* monoton fallend im Intervall $(-\infty, \frac{5}{2})$, monoton steigend in $(\frac{5}{2}, \infty)$.

c) $f(x) = 9x^4 - 8x^2$: I. Ableitungen: $f'(x) = 36x^3 - 16x$, $f''(x) = 108x^2 - 16$.
II. Hoch- und Tiefpunkte: *Notwendige Bedingung*: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 36x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow$

$$4x(9x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \vee 9x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 9x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\frac{2}{3}$$

als eventuelle Extrema der Funktion. Die *hinreichende Bedingung* ergibt:

$f''(-\frac{2}{3}) = 32 > 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$ als Tiefpunkt $T(-\frac{2}{3}|-1{,}78)$; $f''(0) = -16 < 0 \Rightarrow x = 0$ als Hochpunkt $H(0|0)$; $f''(\frac{2}{3}) = 32 > 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ als Tiefpunkt $T(\frac{2}{3}|-1{,}78)$.



$y = f(x) = 9x^4 - 8x^2$

III. Monotonie: Die zwei Tiefpunkte T_1 und T_2 sowie der Hochpunkt H führt auf das Monotonieverhalten:

f(x) monoton fallend auf $(-\infty, -\frac{2}{3})$;

f(x) monoton steigend auf $(-\frac{2}{3}, 0)$;

f(x) monoton fallend auf $(0, \frac{2}{3})$;

f(x) monoton steigend auf $(\frac{2}{3}, \infty)$.

d) $f(x) = -\frac{1}{12}x^8$: Wir bilden die 1. Ableitung $f'(x) = -\frac{2}{3}x^7$, Nullsetzen führt auf: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$ $-\frac{2}{3}x^7 = 0 \Leftrightarrow x^7 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ als kritische Stelle. Jedoch ist mit $f''(x) = -\frac{14}{3}x^6$ $f''(0) = 0$, so dass keine Entscheidung möglich ist, ob bei *x*=0 ein Extremum vorliegt oder nicht. Wir leiten daher weiter ab und bestimmen die Werte der Ableitungen an der Stelle *x*=0: $f'''(x) = -28x^5$ mit $f'''(0) = 0$; $f^{(4)}(x) = -140x^4$ mit $f^{(4)}(0) = 0$; $f^{(5)}(x) = -560x^3$ mit $f^{(5)}(0) = 0$; $f^{(6)}(x) = -1680x^2$ mit $f^{(6)}(0) = 0$; $f^{(7)}(x) = -3360x$ mit $f^{(7)}(0) = 0$; $f^{(8)}(x) = -3360$ mit $f^{(8)}(0) = -3360$. Erst bei der 8. Ableitung treffen wir auf einen Ableitungswert ungleich 0, so dass wegen der 8 als gerader Zahl in der Tat eine Extremstelle vorliegt. Da $f^{(8)}(0) = -3360 < 0$, liegt bei *x*=0 ein Hochpunkt H(0|0) vor. Die Monotonieintervalle sind (-∞, 0) und (0, ∞), *f(x)* ist wegen des Hochpunktes auf (-∞, 0) monoton steigend, auf (0, ∞) monoton fallend.

II.23 a) $f(x) = \frac{1}{4}x^5$: Wir bilden die Ableitungen: $f'(x) = \frac{5}{4}x^4$, $f''(x) = 5x^3$, $f'''(x) = 15x^2$, $f^{(4)}(x) = 30x$, $f^{(5)}(x) = 30$. Nullsetzen der 2. Ableitung führt wegen $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}x^4 = 0 \Leftrightarrow$ $x^4 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ auf *x*=0 als mögliche Wendestelle. Nun ist: $f'''(0) = f^{(4)}(0) = 0$, jedoch $f^{(5)}(0) = 30 \neq 0$, so dass mit der 5. eine ungeradzahlige Ableitung erstmals ungleich 0 ist. Damit liegt bei *x*=0 ein Wendepunkt W(0|0) vor. Das Polynom hat die zwei Krümmungsintervalle (-∞, 0) und (0, ∞), *f(x)* ist z.B. wegen $f''(1) = 5 > 0$ konvex auf (0, ∞) und daher konkav auf (-∞, 0).

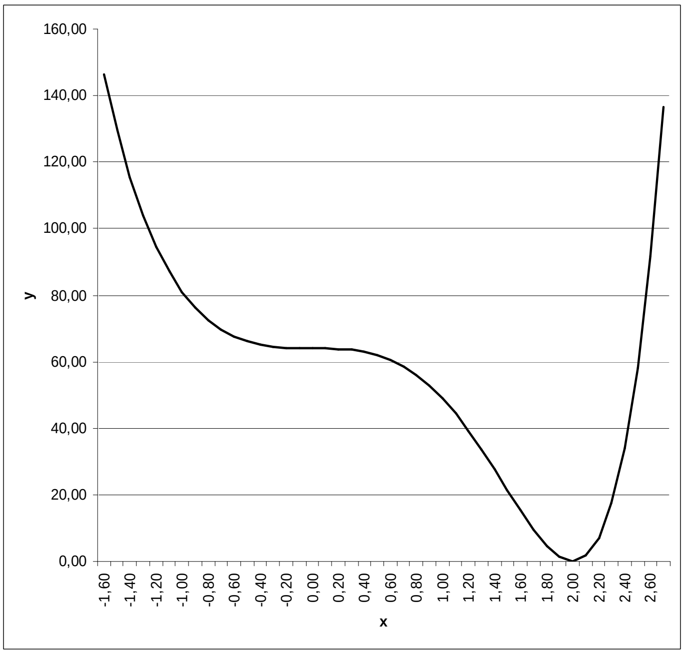
b) $f(x) = 25x - x^3$: I. <u>Ableitungen</u>: $f'(x) = 25 - 3x^2$, $f''(x) = -6x$, $f'''(x) = -6$.
II. <u>Wendepunkte</u>: *Notwendige Bedingung*: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ als kritische Stelle. *Hinreichende Bedingung*: $f'''(0) = -6 \neq 0 \Rightarrow x = 0$ als Wendepunkt W(0|0).
III. <u>Krümmung</u>: Die Krümmungsintervalle lauten (-∞, 0) und (0, ∞), *f(x)* ist wegen $f''(1) = -6 < 0$ auf (0, ∞) konkav, auf (-∞, 0) konvex.

c) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$: I. <u>Ableitungen</u>: $f'(x) = 4x^3 - 8x$, $f''(x) = 12x^2 - 8$, $f'''(x) = 24x$.
II. <u>Wendepunkte</u>: *Notwendige Bedingung*: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow 12x^2 = 8 \Leftrightarrow$ $x^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ als mögliche Stellen für Wendepunkte. *Hinreichende Bedingung*:
$f'''(-\sqrt{\frac{2}{3}}) = -24\sqrt{\frac{2}{3}} \neq 0 \Rightarrow x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ als Wendepunkt W_1($-\sqrt{\frac{2}{3}}$|1,78);
$f'''(\sqrt{\frac{2}{3}}) = 24\sqrt{\frac{2}{3}} \neq 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ als Wendepunkt W_2($\sqrt{\frac{2}{3}}$|1,78).
III. <u>Krümmung</u>: Wir bestimmen $f''(0) = -8 < 0$ und haben daher:
f(x) ist konvex auf (-∞, $-\sqrt{\frac{2}{3}}$); *f(x)* ist konkav auf ($-\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$); *f(x)* ist konvex auf ($\sqrt{\frac{2}{3}}$, ∞).

d) $f(x) = (x^3 - 8)^2$: I. <u>Ableitungen</u>: $f'(x) = 2(x^3 - 8) \cdot 3x^2 = 6x^2(x^3 - 8) = 6x^5 - 48x^2$ (nach der Kettenregel), $f''(x) = 30x^4 - 96x$, $f'''(x) = 120x^3 - 96$.
II. <u>Wendepunkte</u>: *Notwendige Bedingung*: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 30x^4 - 96x = 0 \Leftrightarrow 6x(5x^3 - 16) = 0 \Leftrightarrow$ $x = 0 \vee x^3 = \frac{16}{5} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt[3]{\frac{16}{5}}$. *Hinreichende Bedingung*: $f'''(0) = -96 \neq 0 \Rightarrow x = 0$ als

Wendepunkt $W_1(0|64)$ sowie: $f'''(\sqrt[3]{\frac{16}{5}}) = 288 \neq 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{16}{5}}$ als Wendepunkt $W_2(\sqrt[3]{\frac{16}{5}}|23{,}04)$.

III. Krümmung: Bei T(2|0) liegt wegen $f'(2) = 0$ und $f''(2) > 0$ ein relatives Minimum vor. Daher ist f(x) auf dem Intervall $(\sqrt[3]{\frac{16}{5}}, \infty)$, das x=2 enthält, konvex, daher auf $(0, \sqrt[3]{\frac{16}{5}})$ konkav, daher auf $(-\infty, 0)$ konvex.



$y = f(x) = (x^3 - 8)^2$

IV.1 a) Kurvendiskussion zu $f(x) = 3x^2 + 12x - 96$:

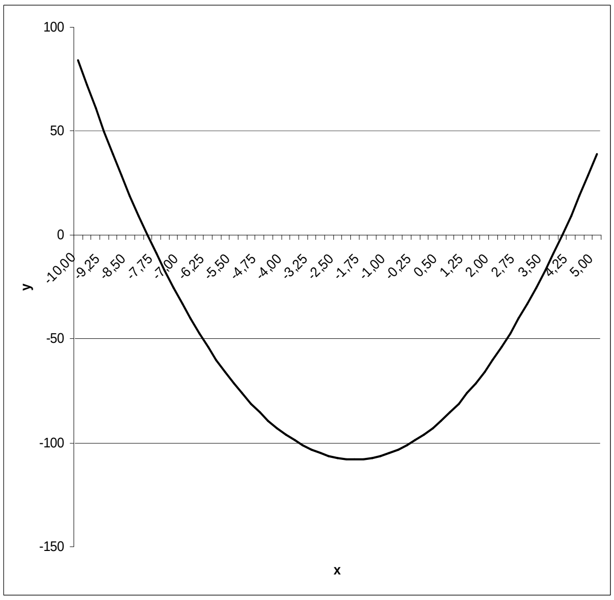
I. Definitionsbereich: D_f = **R**. Das Polynom ist überall stetig und differenzierbar. Es liegt eine Parabel 2. Ordnung vor. Eine Symmetrie ist zwar nicht feststellbar, doch sind Parabeln 2. Grades immer achsensymmetrisch zu der durch den Scheitelpunkt S(d|c) gehenden senkrechten Geraden x = d. Den Scheitelpunkt S bestimmen wir übrigens dabei über die quadratische Ergänzung:

$$f(x) = 3x^2 + 12x - 96 = 3[x^2 + 4x - 32] = 3[x^2 + 4x + 4 - 4 - 32] = 3[(x+2)^2 - 36] = 3(x+2)^2 - 108$$

als: S(-2|-108).

II. Ableitungen: $f'(x) = 6x + 12$, $f''(x) = 6$, $f'''(x) = 0$.

III. Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 12x - 96 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 32 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{2^2 + 32} \Leftrightarrow$ $x = -2 \pm \sqrt{36} \Leftrightarrow x = -2 \pm 6 \Leftrightarrow x = -8 \vee x = 4$, also: $N_1(-8|0)$, $N_2(4|0)$.



IV. Hoch- und Tiefpunkte: *Notwendige Bedingung*: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 12 = 0 \Leftrightarrow 6x = -12 \Leftrightarrow$ $x = -2$ als potenzieller Extrempunkt. *Hinreichende Bedingung*: $f''(-2) = 6 > 0 \Rightarrow x = -2$ als Tiefpunkt. Der Tiefpunkt ist der Scheitelpunkt
S(-2|-108) der nach oben geöffneten Parabel.

V. Wendepunkte: Wegen $f''(x) = 6 \neq 0$ besitzt *f(x)* keinen Wendepunkt.

VI. Verhalten für betragsmäßig große x: Beide Parabeläste gehen bei $x \to \pm\infty$ ebenfalls gegen $+\infty$, nicht zuletzt auf Grund des Scheitelpunkts als Tiefpunkt.

$y = f(x) = 3x^2 + 12x - 96$ ◀ VII. Zeichnung

b) Kurvendiskussion zu $f(x) = x^2(x-8)$:

I. Definitionsbereich: D_f = **R**. Das Polynom ist überall stetig und differenzierbar. Wir schreiben neben der Form als Produkt das Polynom ausmultipliziert als: $f(x) = x^3 - 8x^2$.

II. <u>Symmetrie</u>: Eine Symmetrie ist wegen der geraden und der ungeraden Exponenten nicht erkennbar.

III. Ableitungen: Die ausmultiplizierte Form von *f(x)* bildet die Grundlage für die folgenden Ableitungen: $f'(x) = 3x^2 - 16x$, $f''(x) = 6x - 16$, $f'''(x) = 6$.

IV. Nullstellen: *Notwendige und hinreichende Bedingung*:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-8) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8$$

Die Nullstellen lauten: $N_1(0|0)$, $N_2(8|0)$.

V. Hoch- und Tiefpunkte: *Notwendige Bedingung*:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 16x = 0 \Leftrightarrow x(3x-16) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 3x - 16 = 0$$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee 3x = 16 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{16}{3}$ mit *x* = 0 und *x* = $\frac{16}{3}$ als mögliche Extremstellen.

Hinreichende Bedingung: $f''(0) = -16 < 0 \Rightarrow x = 0$ als relatives Maximum;

$f''(\frac{16}{3}) = 32 - 16 = 16 > 0 \Rightarrow x = \frac{16}{3}$ als relatives Minimum.

Es liegen damit der Hochpunkt H(0|0) und der Tiefpunkt T($\frac{16}{3}$|$-\frac{2048}{27}$) vor.

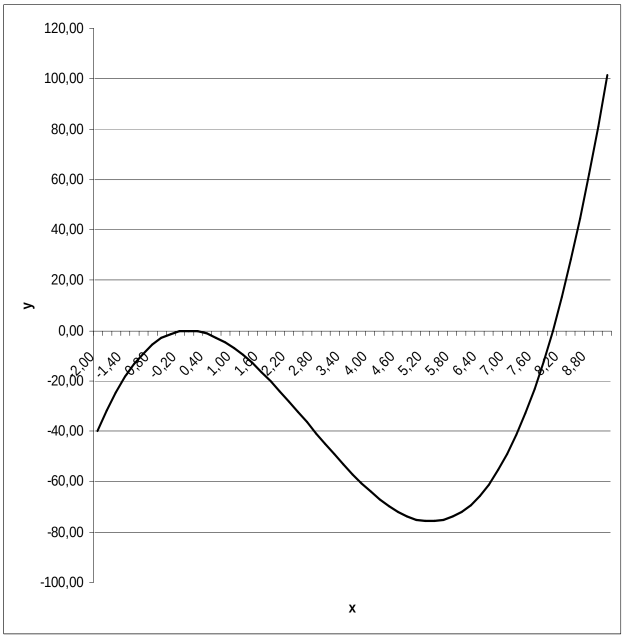
VI. Wendepunkte: *Notwendige Bedingung*: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 16 = 0 \Leftrightarrow$

$6x = 16 \Leftrightarrow x = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$ mit *x* = $\frac{8}{3}$ als möglichen Wendepunkt. *Hinreichende Bedingung*:

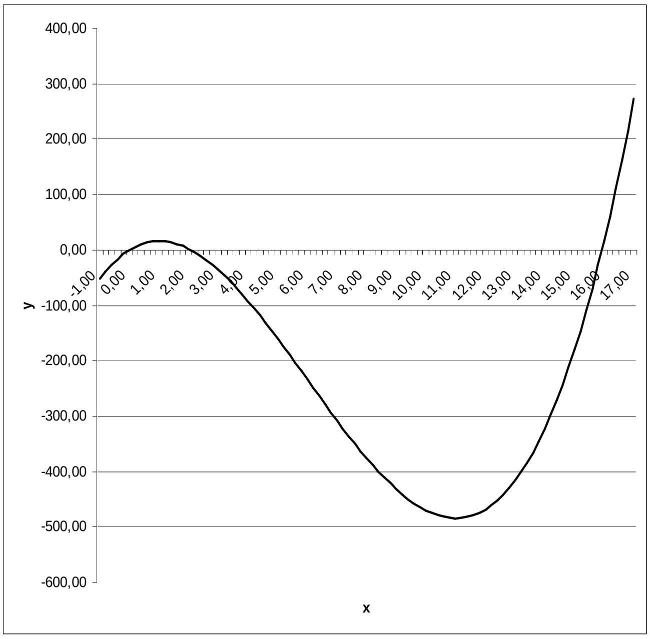
$f'''(\frac{8}{3}) = 6 \neq 0 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$ als Wendepunkt W($\frac{8}{3}$|$-\frac{1024}{27}$).

VII. Verhalten für betragsmäßig große x: In $f(x) = x^3 - 8x^2$ ist x^3 die höchste Potenz, so dass sich das Verhalten des Polynoms daran ausrichtet. Also gilt: $x \to \infty \Rightarrow x^3 \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty$ und: $x \to -\infty \Rightarrow x^3 \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$.

▼ VIII. Zeichnung



$y = f(x) = x^2(x-8)$



$y = f(x) = x^3 - 18x^2 + 33x$

c) Kurvendiskussion zu $f(x) = x^3 - 18x^2 + 33x$:

I. Definitionsbereich: D_f = **R**. Das Polynom ist überall stetig und differenzierbar.

II. Eine Symmetrie ist wegen der geraden und der ungeraden Exponenten nicht erkennbar.

III. Ableitungen des Polynoms sind: $f'(x) = 3x^2 - 36x + 33$, $f''(x) = 6x - 36$, $f'''(x) = 6$.

IV. Nullstellen: *Notwendige und hinreichende Bedingung*:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 18x^2 + 33x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 18x + 33) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 18x + 33 = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0 \vee x = 9 \pm \sqrt{81 - 33} = 9 \pm \sqrt{48}$

Nullstellen sind damit: $N_1(0|0)$, $N_2(9 - \sqrt{48}\,|0)$, $N_3(9 + \sqrt{48}\,|0)$.

V. Hoch- und Tiefpunkte: *Notwendige Bedingung*: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 36x + 33 = 0 \Leftrightarrow$

$x = \frac{36 \pm \sqrt{1296 - 4 \cdot 3 \cdot 33}}{2 \cdot 3} = \frac{36 \pm \sqrt{900}}{6} = \frac{36 \pm 30}{6} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 11$ als mögliche Extremstellen.

Hinreichende Bedingung: $f''(1) = 6 - 36 = -30 < 0 \Rightarrow x = 1$ als Hochpunkt H(1|16);

$f''(11) = 66 - 36 = 30 > 0 \Rightarrow x = 11$ als Tiefpunkt T(11|-484).

VI. Wendepunkte: *Notwendige Bedingung*: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 36 = 0 \Leftrightarrow 6x = 36 \Leftrightarrow x = 6$ als möglicher Wendepunkt. *Hinreichende Bedingung*: $f'''(6) = 6 \neq 0 \Rightarrow x = 6$ als Wendepunkt W(6|-234).

VII. Verhalten für betragsmäßig große x: In $f(x) = x^3 - 8x^2$ ist x^3 die höchste Potenz, so dass sich das Verhalten des Polynoms daran ausrichtet. Also gilt: $x \to \infty \Rightarrow x^3 \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty$ und: $x \to -\infty \Rightarrow x^3 \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$.

▲ VIII. Zeichnung

---

d) Kurvendiskussion zu $f(x) = (x^2 - 16)(x^2 + 8)$:

I. Definitionsbereich: D_f = **R**. Das Polynom ist überall stetig und differenzierbar. Wir multiplizieren aus: $f(x) = (x^2 - 16)(x^2 + 8) = x^4 - 16x^2 + 8x^2 - 128 = x^4 - 8x^2 - 128$.

II. Eine Symmetrie zur y-Achse ist wegen der geraden Exponenten in den Summanden der Funktion gegeben.

III. Ableitungen: $f'(x) = 4x^3 - 16x$, $f''(x) = 12x^2 - 16$, $f'''(x) = 24x$.

IV. Nullstellenbestimmung unter Verwendung der Produktdarstellung der Funktion:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 16)(x^2 + 8) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 16 = 0 \vee x^2 + 8 \Leftrightarrow x^2 = 16 \vee [x^2 = -8] \Leftrightarrow x = \pm 4$

Nullstellen sind also: $N_1(-4|0)$, $N_2(4|0)$.

V. Hoch- und Tiefpunkte: *Notwendige Bedingung*: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow$

$4x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \vee x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm 2$ als kritische Stellen.

Hinreichende Bedingung: $f''(-2) = 48 - 16 = 32 > 0 \Rightarrow x = -2$ als Tiefpunkt T_1(-2|-144);

$f''(0) = -16 < 0 \Rightarrow x = 0$ als Hochpunkt H(0|-128);

$f''(2) = 48 - 16 = 32 > 0 \Rightarrow x = 2$ als Tiefpunkt T_2(2|-144).

Dabei gilt auf Grund der Symmetrie: *f(-2)* = *f(2)* = (-12)·12 = -144.

VI. Wendepunkte: *Notwendige Bedingung*: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow 12x^2 = 16 \Leftrightarrow$

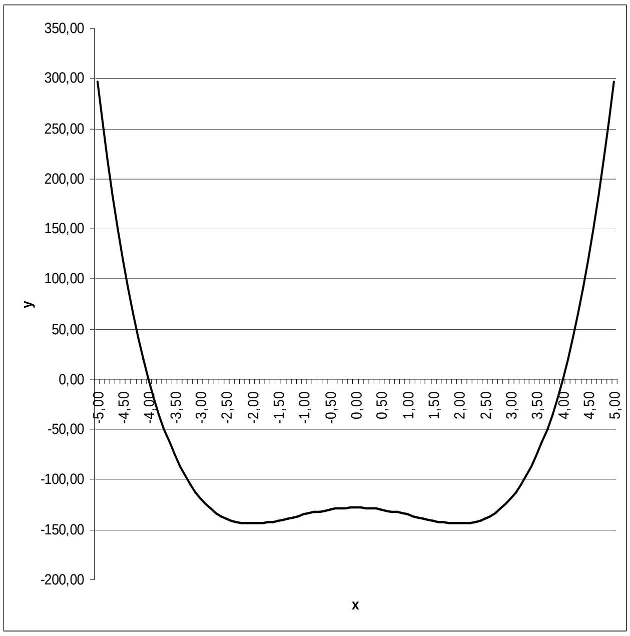
$x^2 = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ als kritische Stellen. *Hinreichende Bedingung*:

$f'''(-\frac{2}{\sqrt{3}}) = -24 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \neq 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ als Wendepunkt $W_1(-\frac{2}{\sqrt{3}}|-137)$;

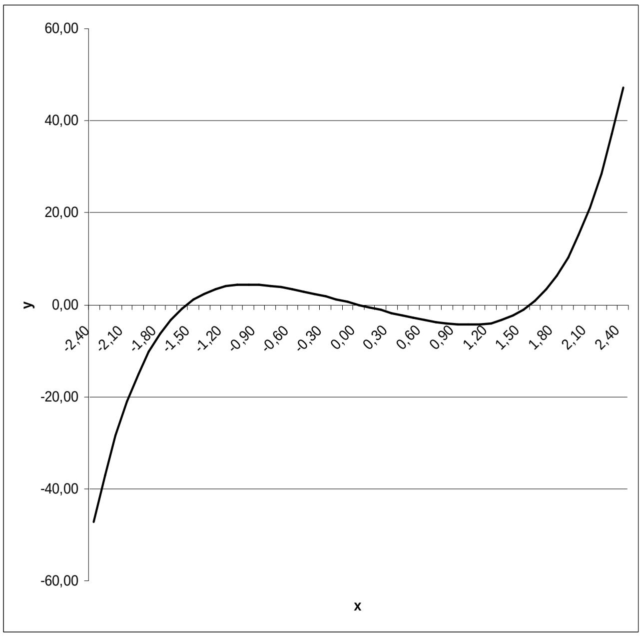
$f'''(\frac{2}{\sqrt{3}}) = 24 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \neq 0 \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ als Wendepunkt $W_2(\frac{2}{\sqrt{3}}|-137)$.

VII. Verhalten für betragsmäßig große x: Mit x^4 als höchster Potenz im Polynom ergibt sich: $x \to \infty \Rightarrow x^4 \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty$ und weiter: $x \to -\infty \Rightarrow x^4 \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty$.

▼ VIII. Zeichnung



$y = f(x) = (x^2 - 16)(x^2 + 8)$



$y = f(x) = \frac{3}{5}x^5 + x^3 - 6x$

e) Kurvendiskussion zu $f(x) = \frac{3}{5}x^5 + x^3 - 6x$:

I. Definitionsbereich: D_f = **R**. Das Polynom ist überall stetig und differenzierbar.

II. Symmetrie: Wegen der ungeraden Potenzen x^5, x^3 und x ist das Polynom eine ungerade Funktion, also symmetrisch zum Ursprung mit: $f(-x) = -f(x)$.

III. Ableitungen: $f'(x) = 3x^4 + 3x^2 - 6$, $f''(x) = 12x^3 + 6x$, $f'''(x) = 26x^2 + 6$.

IV. Nullstellen: Mit $f(x) = 0$ liegt nach dem Ausklammern von x eine biquadratische Gleichung vor:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{5}x^5 + x^3 - 6x = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{3}{5}x^4 + x^2 - 6\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \frac{3}{5}x^4 + x^2 - 6 = 0 \underset{z=x^2}{\Leftrightarrow}$$

$$x = 0 \vee z^2 + \frac{5}{3}z - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee z = -\frac{5}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 10} = -\frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{385}{36}} = -\frac{5}{6} \pm \frac{1}{6}\sqrt{385} \underset{x^2=z}{\Leftrightarrow}$$

$$x = 0 \vee [x^2 = -4{,}1] \vee x^2 = 2{,}44 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{2{,}44} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm 1{,}56$$

Nullstellen der Funktion sind somit: $N_1(-1{,}56|0)$, $N_2(0|0)$, $N_3(1{,}56|0)$.

V. Hoch- und Tiefpunkte: *Notwendige Bedingung*: Wir lösen die biquadratische Gleichung:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^4 + 3x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0 \underset{z=x^2}{\Leftrightarrow} z^2 + z - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$z = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \Leftrightarrow z = -1 \vee z = 2 \underset{x^2=z}{\Leftrightarrow} [x^2 = -1] \vee x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Hinreichende Bedingung: Einsetzen in die 2. Ableitung ergibt:

$f''(-\sqrt{2}) = 12 \cdot (-\sqrt{2})^3 + 6 \cdot (-\sqrt{2}) = -30\sqrt{2} < 0 \Rightarrow x = -\sqrt{2}$ als Hochpunkt;

$f''(\sqrt{2}) = 12 \cdot \sqrt{2}^3 + 6 \cdot \sqrt{2} = 30\sqrt{2} > 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}$ als Tiefpunkt.

Wegen *f*($\sqrt{2}$) = $\frac{3}{5}\sqrt{2}^5+\sqrt{2}^3-6\sqrt{2}=\frac{3}{5}\cdot 4\sqrt{2}+2\sqrt{2}-6\sqrt{2}=-\frac{8}{5}\sqrt{2}$ und *f*(-$\sqrt{2}$) = -*f*($\sqrt{2}$) = $\frac{8}{5}\sqrt{2}$ (Symmetrie) hat *f(x)* den Hochpunkt H(-$\sqrt{2}$ | $\frac{8}{5}\sqrt{2}$) und den Tiefpunkt T($\sqrt{2}$ |-$\frac{8}{5}\sqrt{2}$).

VI. Wendepunkte: *Notwendige Bedingung*: Nullsetzen der 2. Ableitung führt zu:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 12x^3+6x=0 \Leftrightarrow 6x(2x^2+1)=0 \Leftrightarrow 6x=0 \vee 2x^2+1=0 \Leftrightarrow$$

$$x=0 \vee 2x^2=-1 \Leftrightarrow x=0 \vee [x^2=-\frac{1}{2}] \Leftrightarrow x=0$$

Hinreichende Bedingung: Einsetzen der möglichen Wendepunkte in die 3. Ableitung ergibt: $f'''(0)=26\cdot 0+6=6\neq 0 \Rightarrow x=0$ als Wendepunkt. Auf Grund von *f*(0) = 0 besitzt die Funktion einen Wendepunkt bei: W(0|0).

VII. Verhalten für betragsmäßig große x: Der Term x^5 ist die höchste Potenz in der Polynomfunktion *f(x)* und besitzt den positiven Koeffizienten $\frac{3}{5}$. Damit gilt:

$x\to\infty \Rightarrow f(x)=\frac{3}{5}x^5+...\to\infty$ sowie: $x\to-\infty \Rightarrow f(x)=\frac{3}{5}x^5+...\to-\infty$.

▲ VIII. Zeichnung

---

f) Kurvendiskussion zu $f(x)=x^5-25x^3+144x$

I. Definitionsbereich: D_f = **R**. Das Polynom ist überall stetig und differenzierbar.

II. Symmetrie: Wegen der ungeraden Potenzen x^5, x^3 und x ist das Polynom eine ungerade Funktion, also symmetrisch zum Ursprung.

III. Ableitungen: $f'(x)=5x^4-75x^2+144$, $f''(x)=20x^3-150x$, $f'''(x)=60x^2-150$.

IV. Nullstellen: *Notwendige und hinreichende Bedingung* (mit biquadratischer Gleichung):

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^5-25x^3+144x=0 \Leftrightarrow x(x^4-25x^2+144)=0 \underset{z=x^2}{\Leftrightarrow} x=0 \vee z^2-25z+144=0 \Leftrightarrow$$

$$x=0 \vee z=12{,}5\pm\sqrt{156{,}25-144}=12{,}5\pm\sqrt{12{,}25}=12{,}5\pm 3{,}5 \underset{x^2=z}{\Leftrightarrow} x=0 \vee x^2=9 \vee x^2=16 \Leftrightarrow$$

$$x=0 \vee x=\pm 3 \vee x=\pm 4$$

Die Nullstellen von *f(x)* sind: N_1(-4|0), N_2(-3|0), N_3(0|0), N_4(3|0), N_5(4|0).

V. Hoch- und Tiefpunkte: *Notwendige Bedingung* (mit biquadratischer Gleichung):

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 5x^4-75x^2+144=0 \underset{z=x^2}{\Leftrightarrow} 5z^2-75z+144=0 \Leftrightarrow z=\frac{75\pm\sqrt{75^2-4\cdot 5\cdot 144}}{2\cdot 5} \Leftrightarrow$$

$$z=\frac{75\pm\sqrt{2745}}{10}=\frac{75\pm 52{,}4}{10} \Leftrightarrow z=2{,}26 \vee z=12{,}74 \underset{x^2=z}{\Leftrightarrow} x^2=2{,}26 \vee x^2=12{,}74 \Leftrightarrow x=\pm 1{,}5 \vee x=\pm 3{,}57$$

als kritische Stellen für Extremwerte. *Hinreichende Bedingung*:

$f''(-3{,}57)=-374{,}49<0 \Rightarrow x=-3{,}57$ als Hochpunkt H_1(-3,57|43,52);
$f''(-1{,}5)=157{,}5>0 \Rightarrow x=-1{,}5$ als Hochpunkt T_1(-1,5|-139,22);
$f''(1{,}5)=-157{,}5<0 \Rightarrow x=1{,}5$ als Hochpunkt T_1(1,5|139,22);
$f''(3{,}57)=374{,}49>0 \Rightarrow x=3{,}57$ als Tiefpunkt T_2(3,57|-43,52).

Beachte dabei die Punktsymmetrie von Funktion und 2. Ableitung.

VI. Wendepunkte: *Notwendige Bedingung*: $f''(x)=0 \Leftrightarrow 20x^3-150x=0 \Leftrightarrow$

$$10x(2x^2-15)=0 \Leftrightarrow 10x=0 \vee 2x^2-15=0 \Leftrightarrow x=0 \vee 2x^2=15 \Leftrightarrow x=0 \vee x^2=7{,}5 \Leftrightarrow$$

$x = 0 \vee x = \pm\sqrt{7{,}5} = \pm 2{,}74$ als eventuelle Wendestellen.

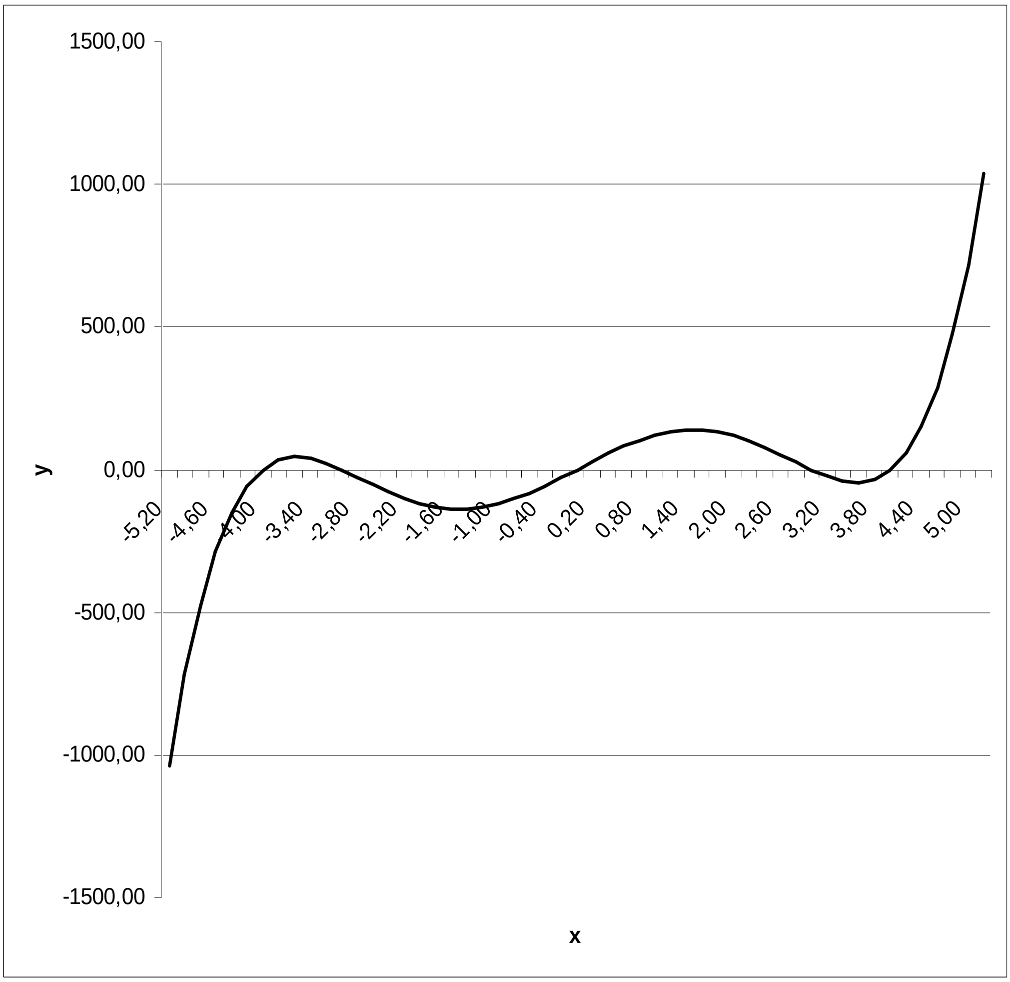
Hinreichende Bedingung, d.h. Einsetzen der kritischen *x*-Werte in die 3. Ableitung:

$f'''(-2{,}74) = 300{,}46 \neq 0 \Rightarrow x = -2{,}74$ als Wendepunkt W_1(-2,74|34,73);

$f'''(2{,}74) = 300{,}46 \neq 0 \Rightarrow x = 2{,}74$ als Wendepunkt W_2(2,74|-34,73).

VII. Verhalten für betragsmäßig große x: Der Term x^5 ist die höchste Potenz in der Polynomfunktion *f(x)*. Also gilt: $x \to \infty \Rightarrow x^5 \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty$ und weiter: $x \to -\infty \Rightarrow x^5 \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$.

VIII. Zeichnung ▶



IV.2 a) Kurvendiskussion zu $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$:

I. Definitionsbereich: D_f = **R**. Das Polynom ist überall stetig und differenzierbar.

II. Eine Symmetrie ist wegen der geraden und der ungeraden Exponenten nicht erkennbar.

III. Ableitungen: $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$, $f''(x) = 6x - 4$, $f'''(x) = 6$.

IV. Nullstellen: Nullsetzen der Funktion führt zu: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$ (*). Die kubische Gleichung ist durch Polynomdivision lösbar, *x*=2 löst (*):

$(x^3-2x^2-4x+8):(x-2) = x^2 - 4$
$\underline{-(x^3-2x^2)}$
$\quad -4x+8$
$\quad \underline{(-4x+8)}$
$\quad 0$

Somit gilt: (*) $\Leftrightarrow x = 2 \vee x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \pm 2 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$. Die gesuchten Nullstellen sind also: N_1(-2|0), N_2(2|0).

V. Hoch- und Tiefpunkte: *Notwendige Bedingung*: Nullsetzen der 1. Ableitung ergibt:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \vee x = 2$$

Hinreichende Bedingung: Einsetzen der gefundenen *x*-Werte in die 2. Ableitung führt zu:

$f''(-\frac{2}{3}) = -8 < 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$ als Hochpunkt H($-\frac{2}{3}$|9,48)

$f''(2) = 8 > 0 \Rightarrow x = 2$ als Tiefpunkt T(2|0) (identisch mit der Nullstelle N_2(2|0)).

VI. Wendepunkte: *Notwendige Bedingung*: Nullsetzen der 2. Ableitung ergibt:

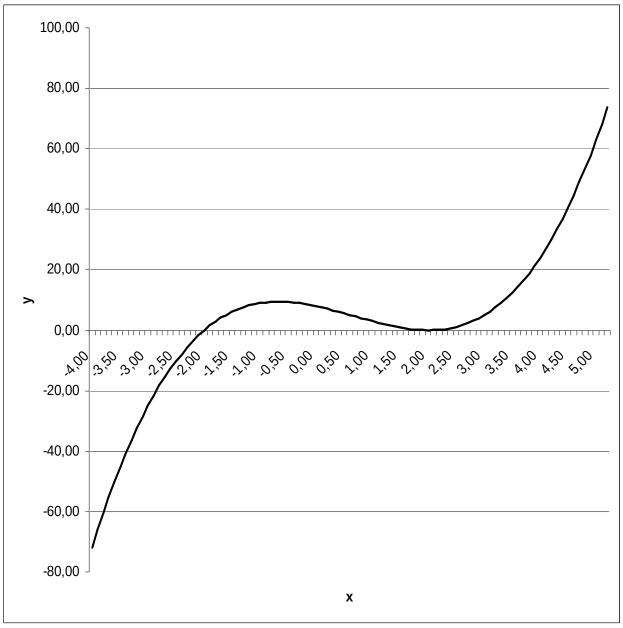
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow 6x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Hinreichende Bedingung: Einsetzen der gefundenen *x*-Werte in die 3. Ableitung ergibt:

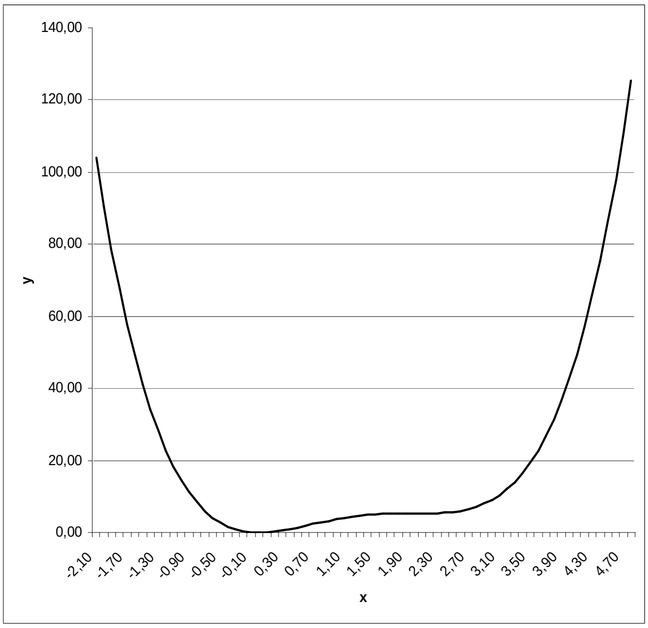
$f'''(\frac{2}{3}) = 6 \neq 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ als Wendepunkt W($\frac{2}{3}$|4,74).

VII. Verhalten für betragsmäßig große x: In *f(x)* ist x^3 die höchste Potenz, so dass sich das Verhalten des Polynoms daran ausrichtet. Also gilt: $x \to \infty \Rightarrow x^3 \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty$ und: $x \to -\infty \Rightarrow x^3 \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$.

▼ VIII. Zeichnung



$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$



$f(x) = x^4 - \frac{16}{3}x^3 + 8x^2$

b) Kurvendiskussion zu $f(x) = x^4 - \frac{16}{3}x^3 + 8x^2$

I. Definitionsbereich: D_f = **R**. Das Polynom ist überall stetig und differenzierbar.

II. Eine Symmetrie ist wegen der geraden und der ungeraden Exponenten nicht erkennbar.

III. Ableitungen: $f'(x) = 4x^3 - 16x^2 + 16x$, $f''(x) = 12x^2 - 32x + 16$, $f'''(x) = 24x - 32$.

IV. Nullstellen: Nullsetzen des Polynoms ergibt:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - \frac{16}{3}x^3 + 8x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2\left(x^2 - \frac{16}{3}x + 8\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x^2 - \frac{16}{3}x + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$x=0 \vee x=\frac{8}{3}\pm\sqrt{\frac{64}{9}-8}=\frac{8}{3}\pm\sqrt{-\frac{8}{9}} \Leftrightarrow x=0$

Einzige Nullstelle ist damit: N(0|0).

V. Hoch- und Tiefpunkte: *Notwendige Bedingung*: Nullsetzen der 1. Ableitung ergibt:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-16x^2+16x=0 \Leftrightarrow 4x(x^2-4x+4)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow$

$x=0 \vee x=2\pm\sqrt{4-4}=2\pm 0=2$ als kritische Stellen für Extrema.

Hinreichende Bedingung: Einsetzen der gefundenen *x*-Werte in die 2. Ableitung führt zu:

$f''(0)=16>0 \Rightarrow x=0$ als Tiefpunkt T(0|0) (identisch mit der Nullstelle N(0|0));

$f''(2)=0 \Rightarrow$ keine Entscheidung für *x*=0 möglich.

VI. Wendepunkte: *Notwendige Bedingung*: Nullsetzen der 2. Ableitung ergibt:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 12x^2-32x+16=0 \Leftrightarrow x=\frac{32\pm\sqrt{1024-4\cdot 12\cdot 16}}{2\cdot 12}=\frac{32\pm\sqrt{256}}{24}=\frac{32\pm 16}{24} \Leftrightarrow$$

$x=\frac{2}{3} \vee x=2$ als kritische Stellen für Wendepunkte.

Hinreichende Bedingung: Einsetzen der gefundenen *x*-Werte in die 3. Ableitung ergibt:

$f'''(\frac{2}{3})=-16\neq 0 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$ als Wendepunkt $W_1(\frac{2}{3}|2{,}27)$;

$f'''(2)=16\neq 0 \Rightarrow x=2$ als Wendepunkt $W_1(2|-\frac{8}{3})$.

VII. Verhalten für betragsmäßig große x: Mit x^4 als höchster Potenz im Polynom ergibt sich: $x\to\infty \Rightarrow x^4\to\infty \Rightarrow f(x)\to\infty$ und weiter: $x\to-\infty \Rightarrow x^4\to\infty \Rightarrow f(x)\to\infty$.

▲ VIII. Zeichnung

---

c) Kurvendiskussion zu $f(x)=(x^2-10)(x+1)^2$:

I. Definitionsbereich: D_f = **R**. Das Polynom ist überall stetig und differenzierbar.

II. Eine Symmetrie ist wegen der geraden und der ungeraden Exponenten nicht erkennbar.

III. Ableitungen: Wir verwenden die Produktregel: $f'(x)=2x(x+1)^2+(x^2-10)\cdot 2(x+1)=$ $(x+1)[2x(x+1)+2(x^2-10)]=(x+1)(4x^2+2x-20)$, $f''(x)=1\cdot(4x^2+2x-20)+(x+1)(8x+2)=$ $4x^2+2x-20+8x^2+2x+8x+2=12x^2+12x-18$, $f'''(x)=24x+12$.

IV. Nullstellen: *Notwendige und hinreichende Bedingung*:

$f(x)=0 \Leftrightarrow (x^2-10)(x+1)^2=0 \Leftrightarrow x^2-10=0 \vee (x+1)^2=0 \Leftrightarrow x^2=10 \vee x+1=0 \Leftrightarrow$

$x=\pm\sqrt{10} \vee x=-1$

Nullstellen des Polynoms sind damit: $N_1(-\sqrt{10}|0)$, $N_2(-1|0)$, $N_3(\sqrt{10}|0)$.

V. Hoch- und Tiefpunkte: *Notwendige Bedingung*:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)(4x^2+2x-20)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \vee 4x^2+2x-20=0 \Leftrightarrow$

$$x=-1 \vee x=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot 4\cdot(-20)}}{2\cdot 4}=\frac{-2\pm\sqrt{324}}{8}=\frac{-2\pm 18}{8} \Leftrightarrow x=-1 \vee x=-\frac{5}{2} \vee x=2$$

Die kritischen Stellen spielen eine entscheidende Rolle für die *hinreichende Bedingung*:

$f''(-\frac{5}{2})=27>0 \Rightarrow x=-\frac{5}{2}$ als Tiefpunkt $T_1(-\frac{5}{2}|-8{,}44)$;

$f''(-1)=-18<0 \Rightarrow x=-1$ als Hochpunkt H(-1|0) (identisch mit der Nullstelle $N_2(-1|0)$);

$f''(2) = 54 > 0 \Rightarrow x = 2$ als Tiefpunkt T_2(2|-54).

VI. Wendepunkte: *Notwendige Bedingung*:

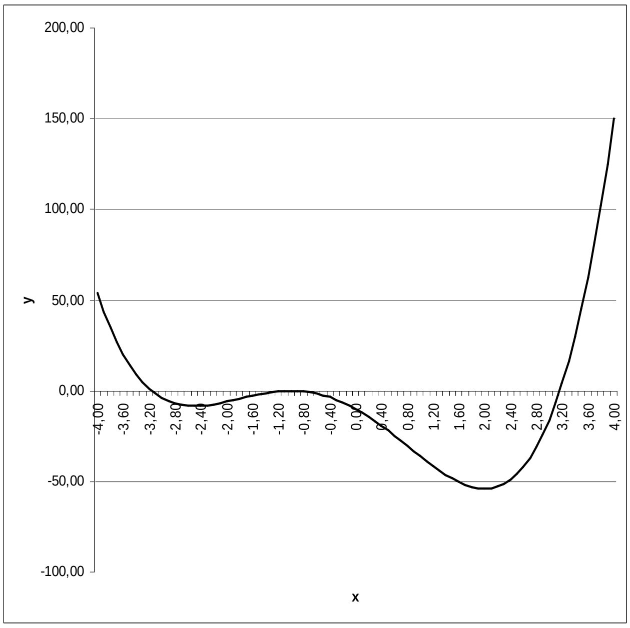
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 + 12x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 12 \cdot (-18)}}{2 \cdot 12} = \frac{-12 \pm \sqrt{1008}}{24} = \frac{-12 \pm 31{,}7}{24} \Leftrightarrow$$

$x = -1{,}82 \vee x = 0{,}8$ als kritische Stellen für die Wendepunkte. *Hinreichende Bedingung*:

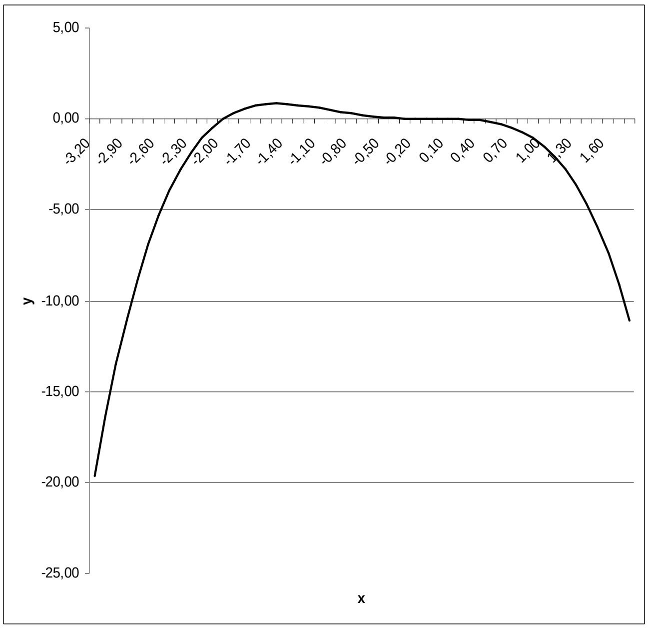
$f'''(-1{,}82) = -31{,}68 \neq 0 \Rightarrow x = -1{,}82$ als Wendepunkt W_1(-1,82|-4,5);
$f'''(0{,}8) = 23{,}2 \neq 0 \Rightarrow x = 0{,}8$ als Wendepunkt W_2(0,8|-30,32).

VII. Verhalten für betragsmäßig große x: x^4 ist – das ergibt ein Überschlagen beim Ausrechnen des *f(x)*-Terms als Produkt – die höchste Potenz im Polynom. Damit folgt:
$x \to \infty \Rightarrow x^4 \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty$ und weiter: $x \to -\infty \Rightarrow x^4 \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty$.

▼ VIII. Zeichnung



$f(x) = (x^2 - 10)(x+1)^2$



$f(x) = -x^3 - \frac{1}{2}x^4$

d) Kurvendiskussion zu $f(x) = -x^3 - \frac{1}{2}x^4$:

I. Definitionsbereich: D_f = **R**. Das Polynom ist überall stetig und differenzierbar. Wir ordnen die Funktion noch nach Potenzen: $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 - x^3$.

II. Eine Symmetrie ist wegen der geraden und der ungeraden Exponenten nicht erkennbar.

III. Ableitungen: $f'(x) = -2x^3 - 3x^2$, $f''(x) = -6x^2 - 6x$, $f'''(x) = -12x - 6$.

IV. Für die Nullstellen haben wir:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^4 - x^3 = 0 \Leftrightarrow -x^3\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow -x^3 = 0 \vee \frac{1}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$$

Die Nullstellen von *f(x)* sind: N_1(-2|0), N_2(0|0).

V. Hoch- und Tiefpunkte: *Notwendige Bedingung*: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$-x^2(2x+3) = 0 \Leftrightarrow -x^2 = 0 \vee 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{3}{2}$ als kritische Stellen für Extrema.

Hinreichende Bedingung: $f''(-\frac{3}{2}) = -\frac{9}{2} < 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$ als Tiefpunkt T($-\frac{3}{2}$|0,84);
$f''(0) = 0 \Rightarrow$ bei x=0 ist keine Entscheidung möglich.

VI. Wendepunkte: *Notwendige Bedingung*: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow -6x(x+1) = 0 \Leftrightarrow$ $-6x = 0 \vee x+1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$ als mögliche Stellen von Wendepunkten.
Hinreichende Bedingung: $f'''(-1) = 6 \neq 0 \Rightarrow x = -1$ als Wendepunkt W_1(-1|0,5);
$f'''(0) = -6 \neq 0 \Rightarrow x = 0$ als Wendepunkt W_2(0|0).

VII. Verhalten für betragsmäßig große x: Der Term x^4 ist die höchste Potenz in der Polynomfunktion *f(x)* und besitzt den negativen Koeffizienten $-\frac{1}{2}$. Damit gilt wegen der geraden Hochzahl 4: $x \to \pm\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$.

▲ VIII. Zeichnung

---

e) Kurvendiskussion zu $f(x) = -\frac{1}{6} \cdot \left(x - \frac{1}{3}x^2\right)^2$:

I. Definitionsbereich: D_f = **R**. Das Polynom ist überall stetig und differenzierbar.
II. Eine Symmetrie ist wegen der geraden und der ungeraden Exponenten nicht erkennbar.

III. Ableitungen: Nach der Kettenregel gilt zunächst: $f'(x) = -\frac{1}{6} \cdot 2 \cdot \left(x - \frac{1}{3}x^2\right)^1 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}x\right) =$

$$-\frac{1}{3} \cdot \left(x - \frac{1}{3}x^2\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{3}x\right) = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x^3\right) = -\frac{1}{3}\left(x - x^2 + \frac{2}{9}x^3\right) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{27}x^3$$

und weiter: $f''(x) = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2$, $f'''(x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{9}x$.

IV. Die Nullstellen berechnen wir als:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{3}x^2\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}x^2\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{3}x^2 = 0 \Leftrightarrow x\left(1 - \frac{1}{3}x\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \vee 1 - \frac{1}{3}x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \frac{1}{3}x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$$

Also: N_1(0|0), N_2(3|0).

V. Hoch- und Tiefpunkte: *Notwendige Bedingung*: Wir setzen die 1. Ableitung gleich 0:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{27}x^3 = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x\left(1 - x + \frac{2}{9}x^2\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x = 0 \vee 1 - x + \frac{2}{9}x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \vee x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{81}{16} - \frac{9}{2}} = \frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{9}{4} \pm \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{3}{2} \vee x = 3$$

Hinreichende Bedingung: Einsetzen der kritischen x-Werte in die 2. Ableitung ergibt:

$f''(0) = -\frac{1}{3} < 0 \Rightarrow x = 0$ als Hochpunkt H_1(0|0) (identisch mit Nullstelle N_1(0|0));

$f''(\frac{3}{2}) = \frac{1}{6} > 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ als Tiefpunkt T($\frac{3}{2}$|$-\frac{3}{32}$);

$f''(3) = -\frac{1}{3} < 0 \Rightarrow x = 3$ als Hochpunkt H_2(3|0) (identisch mit Nullstelle N_2(3|0)).

VI. <u>Wendepunkte</u>: *Notwendige Bedingung*: $f''(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}x^2=0 \Leftrightarrow$

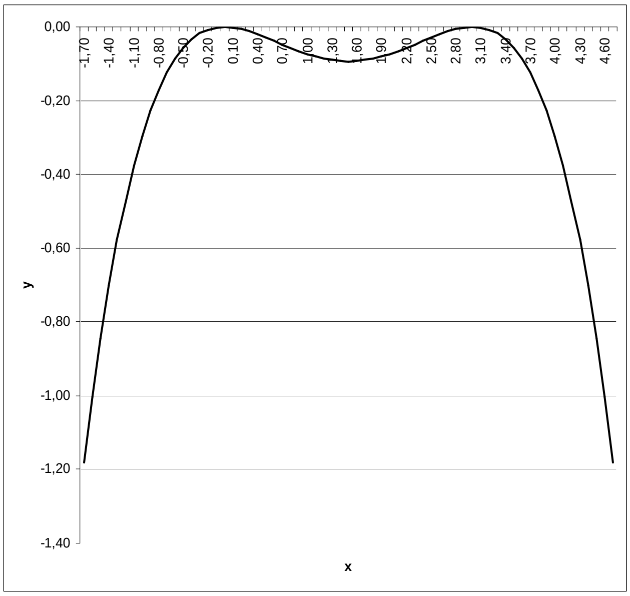
$x^2-3x+\frac{3}{2}=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. *Hinreichende Bedingung*:

$f'''(\frac{3-\sqrt{3}}{2})=\frac{2}{3}-\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9}\neq 0 \Rightarrow x=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ als Wendepunkt W_1(0,63|-0,04);

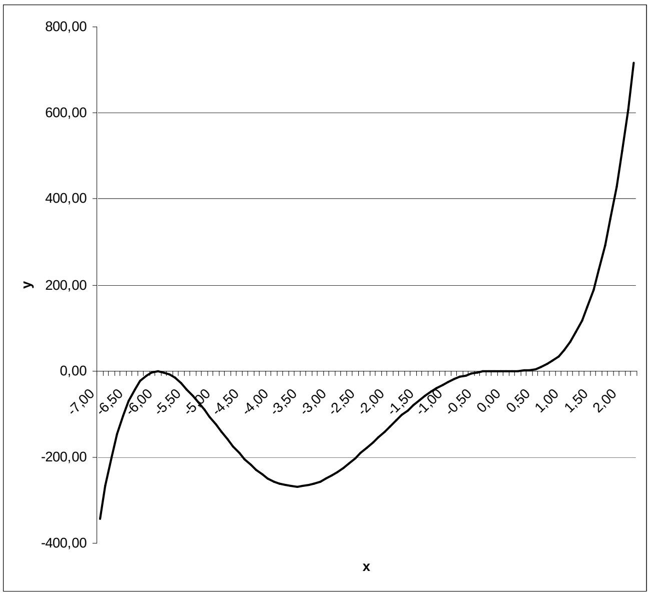
$f'''(\frac{3+\sqrt{3}}{2})=\frac{2}{3}-\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{9}\neq 0 \Rightarrow x=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ als Wendepunkt W_2(2,37|-0,04).

VII. <u>Verhalten für betragsmäßig große x</u>: Der Term x^4 ist die höchste Potenz in der Polynomfunktion *f(x)* und besitzt den negativen Koeffizienten $-\frac{1}{54}$. Damit gilt wegen der geraden Hochzahl 4: $x\to\pm\infty \Rightarrow f(x)\to-\infty$.

▼ VIII. <u>Zeichnung</u>



$f(x)=-\frac{1}{6}\cdot\left(x-\frac{1}{3}x^2\right)^2$



$f(x)=x^3(x+6)^2$

f) <u>Kurvendiskussion</u> zu $f(x)=x^3(x+6)^2$:

I. <u>Definitionsbereich</u>: D_f = **R**. Das Polynom ist überall stetig und differenzierbar. Wir rechnen *f(x)* noch aus: $f(x)=x^3(x+6)^2=x^3(x^2+12x+36)=x^5+12x^4+36x^3$.

II. Eine <u>Symmetrie</u> ist wegen der geraden und der ungeraden Exponenten nicht erkennbar.

III. <u>Ableitungen</u>: $f'(x)=5x^4+48x^3+108x^2$, $f''(x)=20x^3+144x^2+216x$, $f'''(x)=60x^2+288x+216$.

IV. <u>Nullstellen</u>: *Notwendige und hinreichende Bedingung*:

$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3(x+6)^2=0 \Leftrightarrow x^3=0 \vee (x+6)^2=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x+6=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-6$

Wir haben damit die zwei Nullstellen: N_1(-6|0), N_2(0|0).

V. <u>Hoch- und Tiefpunkte</u>: *Notwendige Bedingung*: $f'(x)=0 \Leftrightarrow 5x^4+48x^3+108x^2=0 \Leftrightarrow$

$x^2(5x^2+48x+108)=0 \Leftrightarrow x^2=0 \vee 5x^2+48x+108=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{-48\pm\sqrt{2304-4\cdot5\cdot108}}{2\cdot5} \Leftrightarrow$

$x=0 \vee x=\frac{-48\pm\sqrt{144}}{10}=\frac{-48\pm12}{10} \Leftrightarrow x=0 \vee x=-6 \vee x=-3{,}6$ als kritische Stellen.

Hinreichende Bedingung: Einsetzen der gefundenen *x*-Werte in die 2. Ableitung ergibt:

$f''(-6)=-864<0 \Rightarrow x=-6$ als Hochpunkt H(-6|0);

$f''(0)=0 \Rightarrow$ keine Entscheidung hinsichtlich *x*=0 möglich;

$f''(-3{,}6)=155{,}52>0 \Rightarrow x=-3{,}6$ als Tiefpunkt T(-3,6|-268,74).

VI. <u>Wendepunkte</u>: *Notwendige Bedingung*: $f''(x)=0 \Leftrightarrow 20x^3+144x^2+216x=0 \Leftrightarrow$

$4x(5x^2+36x+54)=0 \Leftrightarrow 4x=0 \vee 5x^2+36x+54=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{-36\pm\sqrt{1296-4\cdot5\cdot54}}{2\cdot5} \Leftrightarrow$

$x=0 \vee x=\frac{-36\pm\sqrt{216}}{10}=\frac{-36\pm6\sqrt{6}}{10}$ als kritische Stellen für die Wendepunkte.

Hinreichende Bedingung: Einsetzen der kritischen *x*-Werte ergibt:

$f'''(-3{,}6-0{,}6\sqrt{6})=298{,}13\neq0 \Rightarrow x=-3{,}6-0{,}6\sqrt{6}$ als Wendepunkt $W_1(-3{,}6-0{,}6\sqrt{6}$ |-112,72);

$f'''(-3{,}6+0{,}6\sqrt{6})=-125{,}23\neq0 \Rightarrow x=-3{,}6+0{,}6\sqrt{6}$ als Wendepunkt $W_2(-3{,}6+0{,}6\sqrt{6}$ |-144,73);

$f'''(0)=216\neq0 \Rightarrow x=0$ als Wendepunkt W_3(0|0).

VII. <u>Verhalten für betragsmäßig große x</u>: Der Term x^5 ist die höchste Potenz in der Polynomfunktion *f(x)*. Also gilt: $x\to\infty \Rightarrow f(x)\to\infty$; $x\to-\infty \Rightarrow f(x)\to-\infty$.

▲ VIII. <u>Zeichnung</u>

IV.3 Als <u>Wendetangenten und Wendenormalen</u> errechnen wir:

a) $f(x)=\frac{x^3}{8}+x$: I. Der <u>Wendepunkt</u> bestimmt sich mit $f'(x)=\frac{3}{8}x^2+1$, $f''(x)=\frac{3}{4}x$,

$f'''(x)=\frac{3}{4}$ auf Grund von $f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x=0 \Leftrightarrow x=0$ und $f'''(0)=\frac{3}{4}\neq0$ der Punkt W(0|0).

II. Wir errechnen: $f(0)=0$, $f'(0)=1$ und erhalten als <u>Tangente und Normale</u> in x_0=0:

t: $y=f'(0)\cdot(x-0)+f(0)=1\cdot x+0=x$; n: $y=-\frac{1}{f'(0)}\cdot(x-0)+f(0)=-1\cdot x+0=-x$

b) $f(x)=4x^3-2x^4$: I. Auf Grund der Ableitungen: $f'(x)=12x^2-8x^3$, $f''(x)=24x-24x^2$, $f'''(x)=24-48x$ berechnen wir wie folgt die <u>Wendepunkte</u>: *Notwendige Bedingung*:
$f''(x)=0 \Leftrightarrow 24x-24x^2=24x(1-x)=0 \Leftrightarrow 24x=0 \vee 1-x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$. *Hinreichende Bedingung*: $f'''(0)=24\neq0 \Rightarrow x=0$ als Wendepunkt W_1(0|0); $f'''(-1)=-24\neq0 \Rightarrow x=-1$ als Wendepunkt W_2(1|2).

II. <u>Tangenten und Normalen</u>: x_0=0: $f(0)=0$, $f'(0)=0 \Rightarrow$ t: $y=0$, n: $x=0$;

x_0=1: $f(1)=2$, $f'(1)=4 \Rightarrow$ t: $y=4(x-1)+2=4x-2$, n: $y=-\frac{1}{4}(x-1)+2=-\frac{1}{4}x+\frac{9}{4}$.

c) $f(x)=x^5+80x^2$: I. Die Ableitungen sind: $f'(x)=5x^4+160x$, $f''(x)=20x^3+160$, $f'''(x)=60x^2$. Nullsetzen der 2. Ableitung ergibt: $f''(x)=0 \Leftrightarrow 20x^3+160=0 \Leftrightarrow$
$20x^3=-160 \Leftrightarrow x^3=-8 \Leftrightarrow x=-2$, Einsetzen in die 3. Ableitung: $f'''(-2)=240\neq0$. Somit liegt bei W(-2|288) ein <u>Wendepunkt</u> vor.

II. <u>Wendetangente und -normale</u> bei x_0=-2 sind dann wegen $f(-2)=288$, $f'(-2)=-240$:

t: $y=-240(x+2)+288=-240x+192$; n: $y=\frac{1}{240}(x+2)+288=\frac{1}{240}x+288\frac{1}{120}$.

d) $f(x)=(2x^2+12x-105)x^4$: I. Die Berechnung der <u>Wendepunkte</u> erfolgt mit der Umformung $f(x)=(2x^2+12x-105)x^4=2x^6+12x^5-105x^4$ über die Ableitungen:
$f'(x)=12x^5+60x^4-420x^3$, $f''(x)=60x^4+240x^3-1260x^2$, $f'''(x)=240x^3+720x^2-2520x$
und das Nullsetzen der 2. Ableitung: $f''(x)=0 \Leftrightarrow 60x^4+240x^3-1260x^2=0 \Leftrightarrow$
$60x^2(x^2+4x-21)=0 \Leftrightarrow 60x^2=0 \vee x^2+4x-21=0 \Leftrightarrow x^2=0 \vee x=-2\pm\sqrt{4+21}=-2\pm 5 \Leftrightarrow$
$x=0 \vee x=-7 \vee x=3$. An den kritischen Stellen *x*=-7 und *x*=3 liegen dann tatsächlich Wendepunkte vor wegen $f'''(-7)=-29400\neq 0$, $f'''(3)=5400\neq 0$, während *x*=0 auf Grund von $f^{(4)}(x)=720x^2+1440x-2520$ und $f^{(4)}(0)=-2520<0$ ein relatives Minimum ist.

II. <u>Wendetangente und -normale</u> sind für x_0=-7 mit: $f(-7)=-218491$, $f'(-7)=86436$:
t: $y=86436(x+7)-218491=86436x+386561$;
n: $y=-\frac{1}{86436}(x+7)-218491=-\frac{1}{86436}x+386560{,}9999$.
Für x_0=3 ergibt sich: $f(3)=-4131$, $f'(3)=-3564$ als Gleichung der Wendetangente:
t: $y=-3564(x-3)-4131=-3564x+6561$, als Gleichung der Wendenormalen:
n: $y=\frac{1}{3564}(x-3)-4131=\frac{1}{3564}x-4131{,}0008$.

IV.4 a) $f(x)=x^5-5x^3+4$, x_0=-2: Es gilt: $f'(x)=5x^4-15x^2$ und damit: $f(-2)=12$, $f'(-2)=20$. Die Tangenten- und die Normalengleichung lauten:
t: $y=20(x-(-2))+12=20(x+2)+12=20x+52$;
n: $y=-\frac{1}{20}(x+2)+12=-0{,}05x-0{,}1+12=-0{,}05x+11{,}9$.

b) $f(x)=x^4-8x^3+16x^2-16$: I. Bestimmung der <u>Extremstellen</u>: *Notwendige Bedingung*:
$f'(x)=4x^3-24x^2+32x=0 \Leftrightarrow 4x(x^2-6x+8)=0 \Leftrightarrow 4x=0 \vee x^2-6x+8=0 \Leftrightarrow$
$x=0 \vee x=3\pm\sqrt{9-8}=3\pm 1 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2 \vee x=4$ als kritische Stellen. *Hinreichende Bedingung* mit $f''(x)=12x^2-48x+32$: $f''(0)=32>0 \Rightarrow x=0$ als Tiefpunkt T_1(0|-16); $f''(2)=-16<0 \Rightarrow x=2$ als Hochpunkt H(2|0); $f''(4)=32>0 \Rightarrow x=4$ als Tiefpunkt T_2(4|-16).
II. Die <u>Tangenten</u> an den gefundenen Extremstellen x_0 sind auf Grund von $f'(x_0)=0$ Parallelen zur x-Achse mit: t: $y=f'(x_0)$. Also für x_0=0: t_0: $y=-16$, für x_0=2: t_2: $y=0$ (und damit die x-Achse), für x_0=4: t_4: $y=-16$.

c) $f(x)=\frac{1}{2}x^3-8x$: I. <u>Ableitungen</u>: $f'(x)=\frac{3}{2}x^2-8$, $f''(x)=3x$, $f'''(x)=3$.
II. <u>Wendepunkt</u>: Der einzige Wendepunkt ist W(0|0) wegen $f''(0)=0$ und $f'''(0)=3\neq 0$.
III. Die <u>Normale</u> im Wendepunkt ist wegen $f(0)=0$, $f'(0)=-8$ eine Gerade durch den Ursprung, nämlich: n: $y=\frac{1}{8}x$.
IV. Die <u>Schnittpunkte</u> zwischen Normale und Polynom ergeben sich durch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen, also:
$$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3-8x=\frac{1}{8}x \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3-\frac{65}{8}x=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x\left(x^2-\frac{65}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x=0 \vee x^2-\frac{65}{4}=0 \Leftrightarrow$$

$x = 0 \vee x^2 = \frac{65}{4} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{65}$

Die Schnittpunkte lauten dann nach Einsetzen der *x*-Werte in die Normalengleichung:

$S_1(-\frac{1}{2}\sqrt{65} \mid -\frac{1}{16}\sqrt{65})$, $S_2(0|0)$, $S_3(\frac{1}{2}\sqrt{65} \mid \frac{1}{16}\sqrt{65})$.

IV.5 a) Bestimmungsaufgabe zum Polynom 3. Grades:

I. Ansatz Polynom dritten Grades	I. Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ mit zu suchenden Koeffizienten a,b,c,d∈**R**.
II. Eigenschaften und Gleichungen a)/b) f besitzt Nullstellen bei x=-1 und x=3 c) f hat einen Tiefpunkt bei x=5/3 d) f schneidet die y-Achse bei y=-3.	II. Eigenschaften: Es gilt: $f(-1) = 0$ (Nullstelle bei *x*=-1) $f(3) = 0$ (Nullstelle bei *x*=3) $f'(\frac{5}{3}) = 0$ (Notwendige Bedingung für Tiefpunkt *x*=$\frac{5}{3}$) $f(0) = -3$ (Schnittpunkt mit der *y*-Achse im Punkt P(0|-3))
III. Aufstellen des linearen Gleichungssystems	III. Aufstellen des Gleichungssystems für die Koeffizienten des Polynoms: Auf Grund von I. und II. ergibt sich durch Einsetzen und Gleichsetzen: $0 = f(-1) = a\cdot(-1)^3 + b\cdot(-1)^2 + c\cdot(-1) + d$ $0 = f(3) = a\cdot 3^3 + b\cdot 3^2 + c\cdot 3 + d$ $0 = f'(\frac{5}{3}) = 3a\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 2b\cdot\frac{5}{3} + c$ $-3 = f(0) = a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0 + d$ Also: $0 = -a + b - c + d$ $0 = 27a + 9b + 3c + d$ $0 = \frac{25}{3}a + \frac{10}{3}b + c$ $-3 = d$
IV. Lösen des linearen Gleichungssystems	IV. Bestimmung der Koeffizienten des Polynoms: Wegen d=-3 erhalten wir (durch Subtraktion von d=-3 in den ersten beiden Gleichungen und Multiplikation mit 3 in der 3. Gleichung) das Gleichungssystem: $-a + b - c = 3$ $27a + 9b + 3c = 3$ $25a + 10b + 3c = 0$ (Multiplikation der 1. Gleichung mit 3:) $-3a + 3b - 3c = 9$ $27a + 9b + 3c = 3$ $25a + 10b + 3c = 0$

	(Addition der 1. zur 2. Gleichung:) $-3a+3b-3c=9$ $24a+12b=12$ $25a+10b+3c=0$
	(Division der 2. Gleichung durch 12, Addition der 1. zur 3. Gleichung:) $-3a+3b-3c=9$ $2a+b=1$ $22a+13b=9$
	(Multiplikation der 2. Gleichung mit 13:) $-a+b-c=3$ $26a+13b=13$ $22a+13b=9$
	(Subtraktion der 2. von der 3. Gleichung:) $-a+b-c=3$ $26a+13b=13$ $-4a=-4$
	(Division der 2. Gleichung durch 13, Auflösen nach a:) $-a+b-c=3$ $2a+b=1$ $a=1$
	(Auflösen nach b und c:) $a=1$ $2+b=1 \Rightarrow b=-1$ $-1-1-c=3 \Rightarrow -2-c=3 \Rightarrow c=-5$ Die gesuchten Koeffizienten sind: <u>a=1, b=-1, c=-5, d=-3</u>.
V. <u>Funktion</u>	V. Die <u>Funktion</u> hat also die Gleichung: $f(x)=x^3-x^2-5x-3$.
VI. <u>Probe</u>	VI. <u>Probe</u>: Wegen der notwendigen Bedingung $f'(\frac{5}{3})=0$ ist eine Probe zu machen, ob die gefundene Funktion wirklich alle geforderten Eigenschaften erfüllt. Nun ist: $f'(x)=3x^2-2x-5$, $f''(x)=6x-2$ und damit: $f''(\frac{5}{3})=10-2=8>0$ mit x=$\frac{5}{3}$ als Tiefpunkt. Die Funktion erfüllt daher alle geforderten Eigenschaften.
	▼ VII. <u>Zeichnung</u>:

b) <u>Bestimmungsaufgabe</u> zum biquadratischen Polynom 4. Grades:

I. <u>Ansatz</u> Biquadratisches Polynom vierten Grades	I. <u>Ansatz</u>: $f(x)=ax^4+bx^2+c$, $f'(x)=4ax^3+2bx$ mit zu suchenden Koeffizienten a,b,c∊**R**.
II. <u>Eigenschaften</u>	II. <u>Eigenschaften</u>: Es gilt:

und Gleichungen
a) f besitzt Nullstelle bei x=2
b) f hat einen Tiefpunkt bei x=2
c) f hat bei x=1 Steigung -48

$f(2) = 0$ (Nullstelle bei *x*=2)
$f'(2) = 0$ (Notwendige Bedingung für Tiefpunkt *x*=2)
$f'(1) = -48$ (Steigung bei *x*=1)

III. Aufstellen des linearen Gleichungssystems

III. Aufstellen des Gleichungssystems für die Koeffizienten des Polynoms: Auf Grund von I. und II. ergibt sich durch Einsetzen und Gleichsetzen:

$0 = f(2) = 16a + 4b + c$

$0 = f'(2) = 32a + 4b$

$-48 = f'(1) = 4a + 2b$

IV. Lösen des linearen Gleichungssystems

IV. Bestimmung der Koeffizienten des Polynoms: Wir haben das Gleichungssystem:

$16a + 4b + c = 0$
$32a + 4b = 0$
$4a + 2b = -48$

(Multiplikation der 3. Gleichung mit 2:)
$16a + 4b + c = 0$
$32a + 4b = 0$
$8a + 4b = -96$

(Subtraktion der 2. von der 3. Gleichung:)
$16a + 4b + c = 0$
$32a + 4b = 0$
$-24a = -96$

(Auflösen nach a:)
$16a + 4b + c = 0$
$32a + 4b = 0$
$a = 4$

(Multiplikation der 2. Gleichung mit 13:)
$-a + b - c = 3$
$26a + 13b = 13$
$22a + 13b = 9$

(Auflösen nach b und c:)
$a = 4$
$128 + 4b = 0 \Rightarrow 4b = -128 \Rightarrow b = -32$
$64 - 128 + c = 0 \Rightarrow c = 64$

Die gesuchten Koeffizienten sind: a=4, b=-32, c=64.

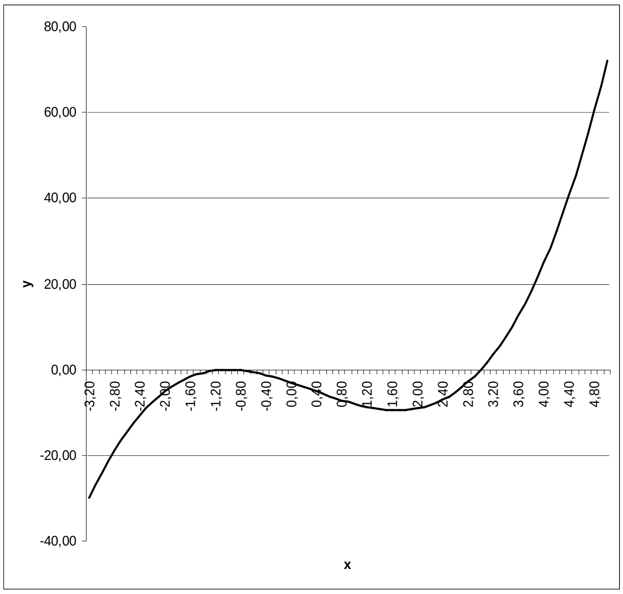
V. Funktion

V. Die Funktion hat damit die Gleichung: $f(x) = 4x^4 - 32x^2 + 64$.

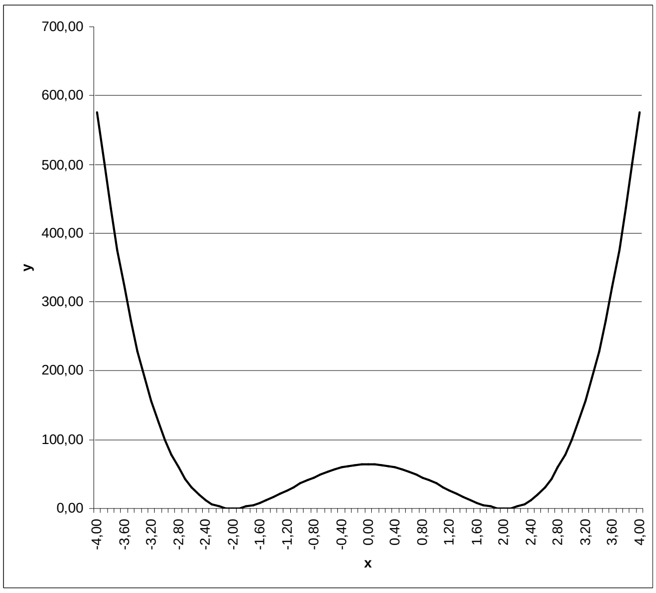
VI. Probe

VI. Probe: Wegen der notwendigen Bedingung $f'(2) = 0$ ist eine Probe zu machen, ob die gefundene Funktion wirklich alle geforderten Eigenschaften erfüllt. Nun ist: $f'(x) = 16x^3 - 64x$, $f'(x) = 48x^2 - 64$ und damit: $f''(2) = 192 - 64 = 128 > 0$ mit *x*=2 als Tiefpunkt. Die Funktion erfüllt alle Eigenschaften.

▼ VII. Zeichnung:



$y = f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$



$y = f(x) = 4x^4 - 32x^2 + 64$

Literatur

BERGMANN, UWE, Training Kurvendiskussion: Rationale Funktionen, Stuttgart 1995

BOLVARY-ZAHN, WOLF DIETER, Kurvendiskussionen, München 1989

BUHLMANN, MICHAEL, Mathematik im Studium. 250 Klausuraufgaben Analysis, Bd.1: Differentialrechnung, Essen ²1990

BUHLMANN, MICHAEL, Mathematik im Studium. 250 Klausuraufgaben Analysis, Bd.2: Integralrechnung, Essen 1990

BUHLMANN, MICHAEL, Mathematik im Studium. 250 Klausuraufgaben Analysis, Bd.3: Reihen, Ableitungen und Integrale, Essen 1992

DOEMER, ULF R., Kurvendiskussion, München 1987

GAL, TOMAS (Hg.), Mathematik zum Studieneinstieg. Grundwissen der Analysis für Wirtschaftswissenschaftler, Naturwissenschaftler und Informatiker, Berlin-Heidelberg-New York 1988

GAL, TOMAS, KRUSE, HERMANN-JOSEF u.a., Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler (= Heidelberger Lehrtexte Wirtschaftswissenschaften), Bd.II: Analysis, Berlin-Heidelberg-New York ²1988

KNOCHE, INGRID, Differenzierbarkeit von Funktionen und Kurvendiskussion (= Duden Abiturhilfen. Mathematik. Analysis), Mannheim ³2002

LANG, SERGE, Analysis, Amsterdam 1977

LEUPOLD, WILHELM, CONRAD, RUDOLF, VÖLKEL, SIEGFRIED, GROßE, GERHARD, FUCKE, RUDOLF, NICKEL, HEINZ, MENDE, HORST, Analysis für Ingenieure, Thun ^{17}1987

REIFFEN, HANS-JÖRG ; TRAPP, HEINZ WILHELM, Einführung in die Analysis. Differentiation und Integration, Osnabrück 1999

SCHOLZ, DANIEL, Differential- und Integralrechnung I und II, Göttingen 2004

WIEDEMANN, CLAUS P., Analysis – eine Einführung mit vielen Beispielen, Berlin 2005

Essen 2006