**Michael Buhlmann**

# Mathematik > Analysis > Laplace-Transformation

Innerhalb der (reellen, komplexen) Analysis kommt der sog. Laplace-Transformation insofern eine Rolle zu, dass mit ihrer Hilfe (physikalisch-) mathematische Probleme z.B. bei Differentialgleichungen gelöst werden können. Durch Zuweisung einer Laplace-Transformierten (Bildfunktion) F(s) zur Originalfunktion (Urbildfunktion) f(t) vermittels des Laplace-Transformationsoperators $\mathfrak{L}$ gilt:

$$f(t) \overset{\mathfrak{L}}{\leftrightarrow} F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt$$

für (reelle, komplexe) Parameter s. Die Transformation $\overset{\mathfrak{L}}{\leftrightarrow}$ heißt Korrespondenz $\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$, es gilt damit: f(t) $\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$ F(s) oder: F(s) = $\mathfrak{L}\{f(t)\}$ (Transformation) bzw. f(t) = $\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$ (Rücktransformation). Die Laplace-Transformation setzt die Existenz des die Bildfunktion F(s) definierenden (Laplace-) Integrals voraus, so dass etwa F(s) -> 0 bei s->∞ folgt. Das (uneigentliche) Integral existiert, wenn f(t) stückweise stetig und $|f(t)/e^{st}| \leq K$ mit reellem positiven K gilt.

Beispiele: a) Zu f(t) = 1, t≥0, ist die Laplace-Transformierte:

$$F(s) = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st} dt = \lim_{z->\infty} \int_0^z e^{-st} dt = \lim_{z->\infty} \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^z = \lim_{z->\infty} \left[ -\frac{1}{s} e^{-sz} + \frac{1}{s} e^0 \right] = \lim_{z->\infty} \left( -\frac{1}{s} e^{-sz} \right) + \frac{1}{s} =$$
$$0 + \frac{1}{s} = \frac{1}{s},$$

so dass die Korrespondenz 1 $\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$ $\frac{1}{s}$ gilt.

b) Ist f(t) = c für 0≤a≤t≤b mit nichtnegativen reellen a, b und bei f(t) = 0 sonst, so ergibt sich als Laplace-Transformierte:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt = \int_a^b c e^{-st} dt = c \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_a^b = c \left[ -\frac{1}{s} e^{-sb} + \frac{1}{s} e^{-sa} \right] = \frac{c}{s} \left( e^{-as} - e^{-bs} \right),$$

so dass die Korrespondenz f(t) = $\begin{cases} c \ (a \leq t \leq b) \\ 0 \ (sonst) \end{cases}$ $\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$ $\frac{c}{s}\left(e^{-as} - e^{-bs}\right)$ gilt.

c) Zu f(t) = cos(t), t≥0, ist die Laplace-Transformierte:

$$F(s) = \int_0^\infty \cos(t) \cdot e^{-st} dt = \lim_{z->\infty} \int_0^z \cos(t) e^{-st} dt = \lim_{z->\infty} \left[ \frac{e^{-st}}{s^2+1} \left( \sin(t) - s\cos(t) \right) \right]_0^z =$$
$$\lim_{z->\infty} \left[ \frac{e^{-sz}}{s^2+1} \left( \sin(z) - s\cos(z) \right) \right] - \left[ \frac{e^0}{s^2+1} \left( \sin(0) - s\cos(0) \right) \right] =$$
$$\lim_{z->\infty} \left( \frac{e^{-sz}}{s^2+1} \left( \sin(z) - s\cos(z) \right) \right) + \frac{s}{s^2+1} = 0 + \frac{s}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1}$$

nicht zuletzt auf Grund des unbestimmten Integrals $\int \cos(t) e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{s^2+1} \left( \sin(t) - s\cos(t) \right)$ (mittels Produktintegration herleitbar). Es gilt damit die folgende Korrespondenz:

cos(t) $\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$ $\frac{s}{s^2+1}$.

d) Zu f(t) = $e^{-t}$, t≥0, ist die Laplace-Transformierte:

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-t}\cdot e^{-st}dt=\lim_{z->\infty}\int_0^z e^{-(1+s)t}dt=\lim_{z->\infty}\left[-\frac{1}{s+1}e^{-(1+s)t}\right]_0^z=\lim_{z->\infty}\left[-\frac{1}{s+1}e^{-(1+s)z}+\frac{1}{s+1}e^0\right]=$$

$$\lim_{z->\infty}\left(-\frac{1}{s+1}e^{-(1+s)z}\right)+\frac{1}{s+1}=0+\frac{1}{s+1}=\frac{1}{s+1},$$

so dass die Korrespondenz $e^{-t}$ $\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$ $\frac{1}{s+1}$ gilt.

Allgemein gelten für reelle Zahlen a, b und natürliche Zahlen n die folgenden besonderen Laplace-Transformationen laut Transformationstabelle:

| **Originalfunktion f(t), t≥0** | **Laplace-Transformierte F(s)** |
|---|---|
| $t^n$ | $\frac{(n-1)!}{s^{n+1}}$ |
| $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a}$ |
| $t^n e^{at}$ | $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ |
| sin(at) | $\frac{a}{s^2+a^2}$ |
| sin(at+b) | $\frac{\sin b\cdot s+a\cos b}{s^2+a^2}$ |
| cos(at) | $\frac{s}{s^2+a^2}$ |
| cos(at+b) | $\frac{\cos b\cdot s+a\sin b}{s^2+a^2}$ |
| $e^{at}$sin(bt) | $\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$ |
| $e^{at}$cos(bt) | $\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$ |
| sinh(at) | $\frac{a}{s^2-a^2}$ |
| cosh(at) | $\frac{s}{s^2-a^2}$ |

Es gelten dabei die nachstehenden Rechenregeln für Originalfunktionen f(t) und Laplace-Transformierte F(s):

a) $\mathfrak{L}\{kf(t)\}=k\mathfrak{L}\{f(t)\}=k\cdot F(s)$ (konstanter Faktor)
b) $\mathfrak{L}\{f(t)+g(t)\}=\mathfrak{L}\{f(t)\}+\mathfrak{L}\{g(t)\}=F(s)+G(s)$ (Summenregel)
c) $\mathfrak{L}\{f(at)\}=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$ (Ähnlichkeitssatz)
d) $\mathfrak{L}\{f(t-a)\}=e^{-as}\cdot\mathfrak{L}\{f(t)\}=e^{-as}\cdot F(s)$ (Verschiebungssatz)
e) $\mathfrak{L}\{f(t+a)\}=e^{as}\cdot\left(F(s)-\int_0^a f(t)e^{-st}\,dt\right)$ (Verschiebungssatz)
f) $\mathfrak{L}\{e^{-at}\cdot f(t)\}=F(s+a)$ (Dämpfungssatz)
g) $\mathfrak{L}\{f(t)*g(t)\}=\mathfrak{L}\{f(t)\}\cdot\mathfrak{L}\{g(t)\}=F(s)\cdot G(s)$ (Faltungssatz)
h) $\mathfrak{L}\{f'(t)\}=s\cdot F(s)-f(0)$, $\mathfrak{L}\{f''(t)\}=s^2\cdot F(s)-s\cdot f(0)-f'(0)$, …
$\mathfrak{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}=s^n\cdot F(s)-\sum_{i=0}^{n-1}s^{n-1-i}f^{(i)}(0)$ (Ableitungen)
i) $F'(s)=\mathfrak{L}\{-t\cdot f(t)\}$, $F''(s)=\mathfrak{L}\{t^2\cdot f(t)\}$, … $F^{(n)}(s)=\mathfrak{L}\{(-t)^n\cdot f(t)\}$,
$\mathfrak{L}\{t^n\cdot f(t)\}=(-1)^n\cdot F^{(n)}(s)$ (Ableitungen)

j) $\mathfrak{L}\{\int_0^\tau f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}\cdot F(s)$, $\mathfrak{L}\{\int_a^\tau f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}\cdot\left(F(s) - \int_0^a f(\tau)d\tau\right)$ (Integral)
k) $\int_s^\infty F(\sigma)d\sigma = \mathfrak{L}\{\frac{1}{t}\cdot f(t)\}$ (Integral)
l) $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty}(s\cdot F(s))$, $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0}(s\cdot F(s))$ (Grenzwertsätze)

für reelle Zahlen a>0, t≥0, k. Dabei ist die Faltung zweier Funktionen f(t) und g(t) definiert vermöge des Faltungsprodukts f(t)*g(t) = $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$. Das Faltungsprodukt ist kommutativ, assoziativ und distributiv. Zu beachten ist noch die Rücktransformation $\mathfrak{L}^{-1}$ der Laplace-Transformation $\mathfrak{L}$, die sich aus den Rechenregeln und obiger Tabelle ergibt.

Beispiele: a) Zu f(t) = $\frac{\sin(at)}{t}$, t>0, ist die Laplace-Transformierte $F(s) = \arctan\left(\frac{a}{s}\right)$, denn es gilt:

$$F'(s) = \frac{1}{\left(\frac{a}{s}\right)^2+1}\cdot\left(-\frac{a}{s^2}\right) = \frac{-a}{s^2\left(\frac{a^2}{s^2}+1\right)} = \frac{-a}{s^2+a^2},$$

woraus durch Rücktransformation wegen $F'(s) = \mathfrak{L}\{-t\cdot f(t)\}$ folgt:

$-t\cdot f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-a}{s^2+a^2}\right\} = -\sin(at)$ => f(t) = $\frac{\sin(at)}{t}$.

b) Ist $F(s) = \frac{3}{(s-1)(s-4)}$ gegeben, so ergibt sich auf Grund der Partialbruchzerlegung: $F(s) = \frac{3}{(s-1)(s-4)} = -\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-4}$ durch Rücktransformation die Originalfunktion:

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s-1)(s-4)}\right\} = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\} = -e^t + e^{4t} = e^{4t} - e^t.$

Zudem ist: f(0) = 0 = $\lim_{s\to\infty}(s\cdot F(s)) = \lim_{s\to\infty}\frac{3s}{(s-1)(s-4)}$, während der Grenzwert $\lim_{t\to\infty} f(t)$ nicht existiert.

c) Für zwei differenzierbare Originalfunktionen f(t), g(t), t≥0, gilt hinsichtlich der Faltung:

$\mathfrak{L}\{f'(t)*g(t)\} = \mathfrak{L}\{f'(t)\}\cdot\mathfrak{L}\{g(t)\} = F'(s)\cdot G(s) = \left(sF(s)-f(0)\right)G(s) =$
$sF(s)G(s) - f(0)G(s) = F(s)\cdot sG(s) - g(0)F(s) + g(0)F(s) - f(0)G(s) =$
$F(s)\left(sG(s)-g(0)\right) + g(0)F(s) - f(0)G(s) = F(s)\cdot G'(s) + g(0)F(s) - f(0)G(s) =$
$\mathfrak{L}\{f(t)\}\cdot\mathfrak{L}\{g'(t)\} + g(0)F(s) - f(0)G(s) = \mathfrak{L}\{f(t)*g'(t)\} + g(0)F(s) - f(0)G(s)$,

so dass sich auf Grund der Rücktransformation ergibt:

f‘(t)*g(t) = f(t)*g‘(t) + g(0)f(t) – f(0)g(t)

und mit f(0) = g(0) = 0 weiter:

f‘(t)*g(t) = f(t)*g‘(t).

d) Zu den Urbildfunktionen f(t) = t und g(t) = cos(t) lässt sich die Laplace-Transformation $\mathfrak{L}\{f(t)\}\cdot\mathfrak{L}\{g(t)\} = F(s)\cdot G(s) = \frac{1}{s^2}\cdot\frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s(s^2+1)}$ bilden. Partialbruchzerlegung führt auf: $\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$, so dass wegen $\mathfrak{L}\{f(t)*g(t)\} = \mathfrak{L}\{f(t)\}\cdot\mathfrak{L}\{g(t)\}$ gilt: $f(t)*g(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\} = \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = 1-\cos(t)$. Nun ist wegen der Achsensymmetrie der Kosinusfunktion zur Achse x = π und wegen des Faltungsintegrals f(t)*g(t) = $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t \tau\cdot cos(t-\tau)d\tau = 1-\cos(t)$:

$\int_0^{2\pi}\tau\cdot cos(\tau)d\tau = \int_0^{2\pi}\tau\cdot cos(2\pi-\tau)d\tau = 1-\cos(2\pi) = 0.$

Transformation und Rücktransformation dienen also dazu, mathematische Probleme, die im Urbild-/Originalbereich auftreten, (nach Transformation) im Bildbereich (als algebraische Gleichung) zu lösen und (nach Rücktransformation) die Lösung wieder im Originalbereich zu platzieren. Dies gilt insbesondere für Probleme betreffend Differenzialgleichungen. Für lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten gilt dabei die folgende Vorgehensweise:

a) Differenzialgleichung 1. Ordnung: y' + ay = g(t), Anfangswert y(0)
I. Laplace-Transformation: $\mathfrak{L}\{y' + ay\} = \mathfrak{L}\{g(t)\}$ => $sY(s) - y(0) + aY(s) = G(s)$ (*)
II. Lösen der algebraischen Gleichung (*): $Y(s) = \frac{G(s)+y(0)}{s+a}$
III. Rücktransformation: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)+y(0)}{s+a}\right\}$ (u.a. mit Transformationstabelle oder Partialbruchzerlegung).

b) Differenzialgleichung 2. Ordnung: y'' + ay' + by = g(t), Anfangswerte y(0), y'(0)
I. Laplace-Transformation: $\mathfrak{L}\{y'' + ay' + by\} = \mathfrak{L}\{g(t)\}$ =>
$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + asY(s) - ay(0) = G(s)$ (*)
II. Lösen der algebraischen Gleichung (*): $Y(s) = \frac{G(s)+y(0)(s+a)+y'(0)}{s^2+as+b}$
III. Rücktransformation: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)+y(0)(s+a)+y'(0)}{s^2+as+b}\right\}$ (u.a. mit Transformationstabelle oder Partialbruchzerlegung).

Beispiele: a) Die lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung lautet: y' – 4y = 17sin(t), y(0) = 0. Die Laplace-Transformation führt u.a. auf Grund von Transformationstabelle und Partialbruchzerlegung auf die Gleichung:

$sY(s) - y(0) - 4Y(s) = \frac{17}{s^2+1}$ => $Y(s) = \frac{17}{(s-4)(s^2+1)} = \frac{1}{s-4} - \frac{s+4}{s^2+1}$.

Die Lösung Y(s) der Gleichung wird zurücktransformiert, so dass sich ergibt:

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+4}{s^2+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+1}\right\} =$
$e^{4t} - \cos(t) - 4\sin(t)$.

Die Funktion $y(t) = e^{4t} - \cos(t) - 4\sin(t)$ ist die Lösung der linearen Differenzialgleichung mit der Anfangswertbedingung y(0) = 0.

b) Gegeben ist die lineare Differenzialgleichung 2. Ordnung: y'' – 2y' +y = $t^2$, y(0) = 6, y'(0) = 4. Die Laplace-Transformation ergibt die algebraische Gleichung mit Lösung:

$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + asY(s) - ay(0) = \frac{2}{s^3}$ => $Y(s) = \frac{\frac{2}{s^3}+6(s-2)+4}{s^2-2s+1} = \frac{6s^4-8s^3+2}{s^3(s-1)^2} = \frac{6s^2+4s+2}{s^3}$.

Es folgt durch Aufteilung in drei Brüche:

$Y(s) = \frac{6}{s} + \frac{4}{s^2} + \frac{2}{s^3}$

und weiter:

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} = 6 + 4t + t^2$

Die Lösung der linearen Differenzialgleichung ist damit: $y(t) = t^2 + 4t + 6$.

c) Die Faltungsdifferenzialgleichung y' – y*cos(t) = 2t, y(0) = 0, ist im Folgenden zu lösen. Durchführung der Laplace-Transformation ergibt:

$\mathfrak{L}\{y' - y * \cos(t)\} = \mathfrak{L}\{2t\}$,

woraus folgt:

$\mathfrak{L}\{y'\} - \mathfrak{L}\{y\} \cdot \mathfrak{L}\{\cos(t)\} = 2\mathfrak{L}\{t\}$.

Es gilt damit:

$sY(s) - y(0) - Y(s) \cdot \frac{s}{s^2+1} = \frac{2}{s^2}$
und weiter u.a. wegen y(0) = 0:
$\left(s - \frac{s}{s^2+1}\right) Y(s) = \frac{2}{s^2} \Leftrightarrow \frac{s^3}{s^2+1} Y(s) = \frac{2}{s^2} \Leftrightarrow Y(s) = \frac{2(s^2+1)}{s^5} = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^5}$.
Die Rücktransformation führt auf:
$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^5}\right\} = t^2 + \frac{1}{12} t^6$.

Literaturhinweise: PAPULA, L., Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Bd.3, Wiesbaden [11]2007, S.626-693 (Laplace-Transformation)

---

Michael Buhlmann, www.michael-buhlmann.de 06.2017