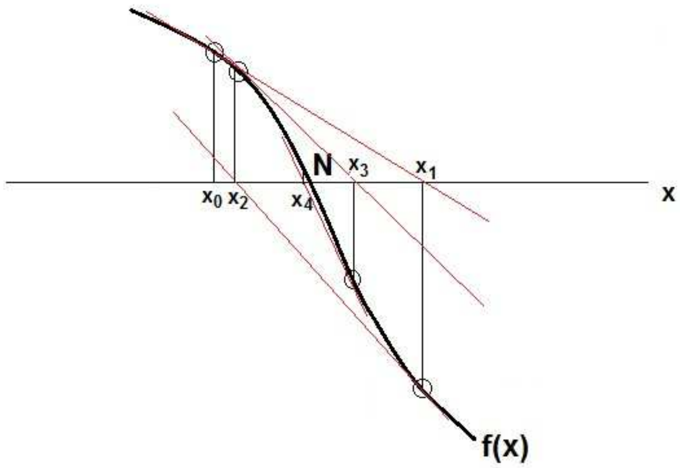
Michael Buhlmann

Mathematik > Analysis > Newtonverfahren

Eine Abbildung $\{a_n\}$: **N** -> **R**, die jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zuordnet, heißt (unendliche) (Zahlen-) Folge: n -> a_n oder $\{a_n\}_{n\varepsilon\mathbf{N}}$, a_n das n-te Folgenglied. Mit a_n = h(n) definiert h die Funktionsvorschrift der Folge. $\{a_n\}$ heißt konvergent, d.h. besitzt einen Grenzwert (Limes) g, wenn (für jedes ε>0) in jeder noch so kleinen (ε-) Umgebung um g (dem offenen Intervall (g-ε, g+ε)) ab einem gewissen n (= n(ε)) alle Folgenglieder liegen; dann gilt: $g = \lim_{n->\infty} a_n$. Nicht konvergente Folgen heißen divergent.

Mit a_n = h(n) liegt eine explizite Folgenvorschrift vor, mit a_n = h(a_{n-k}, …, a_{n-1}) eine rekursive Folge mit vorgegebenem a_1, a_2, … a_k (rekursive Folge k-ter Ordnung). Das Berechnen der Folgenglieder a_n rekursiver Folgen heißt Iteration. Das anschließend dargestellte Newtonverfahren ist eine rekursive Folge 1. Ordnung a_n = h(a_{n-1}) mit vorgegebenem a_1.

Newtonverfahren: Zu einer differenzierbaren Funktion f: D_f -> **R** bestimmt man numerisch eine Nullstelle x_N mit $f(x_N) = 0$, indem man das Newtonverfahren anwendet, das für einen vorgegebenen (Anfangs-) Wert die Funktion f(x) durch eine Tangente annähert, die Nullstelle der Tangente bestimmt und dieses Verfahren wiederholt (Iteration). Es entsteht dadurch eine Folge von reellen x-Werten x_0 (Anfangswert), x_1, x_2, … vermöge der Iterationsgleichung (für n = 0, 1, 2, …):



$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

($f'(x_n)\neq 0$). Die Folge x_1, x_2, … konvergiert dann bei geeignetem Anfangswert x_0 im Allgemeinen gegen die gesuchte Nullstelle x_N der Funktion f(x), also $x_n \to x_N$ ($n\to\infty$). Der Anfangswert x_0 ergibt sich dabei z.B. als Wert in einem Intervall [a;b] mit Vorzeichenwechsel der Funktion, also mit $f(a)\cdot f(b) < 0$ (d.h.: f(a)>0, f(b)<0 oder f(a)<0, f(b)>0). Stellen mit f'(x) = 0 (waagerechte Tangenten bei der Funktion f(x)) beeinflussen die Iteration des Newtonverfahrens negativ, das Newtonverfahren kann divergent werden.

Begründet werden kann das Newtonverfahren wie folgt: Zu einem Punkt x_0 kann die Tangente im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ einer differenzierbaren Funktion f(x) als eine Näherung zur Funktion betrachtet werde. Es gilt dabei die Tangentenformel:

$$\text{t: } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Bei hinreichend geeignetem x_0 kann die Nullstelle der Tangente als Näherung der Nullstelle der Funktion f(x) gelten. Die Nullstelle der Tangente bestimmt sich aber mit:

$$0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

so dass das Auflösen der vorstehenden Gleichung nach x ergibt:

$$0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow 0 = f'(x_0)x - f'(x_0)x_0 + f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0)x_0 - f(x_0) = f'(x_0)x \Leftrightarrow x = \frac{f'(x_0)x_0 - f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Die Stelle x_1 = x liegt dann im Allgemeinen näher an der Nullstelle der Funktion. Wiederholt man mit x_1 die Bestimmung der Tangentennullstelle, erhält man die Näherung x_2 usw. Es gilt damit die oben angegebene Iteration des Newtonverfahrens.

<u>Beispiel 1</u>: Zu $f(x) = x^3 - 8$ ergibt sich – wie bekannt – die Nullstelle $x_N = 2$ bzw. N(2|0). Es wird nun diese Nullstelle mit dem Newtonverfahren bestimmt, wobei hier ausführlich die entsprechenden Tangentengleichungen und die Glieder der rekursiven Folge als Tangentennullstellen tabellarisch dargestellt werden:

<u>Newtonverfahren</u>: f(x) = $\mathbf{x^3-8}$, f'(x) = $\mathbf{3x^2}$, x_0 = **1**

Iteration n =	$\mathbf{x_{n-1}}$ =	$\mathbf{f(x_{n-1})}$ =	$\mathbf{f'(x_{n-1})}$ =	**Tangente** $y = f'(x_{n-1})(x-x_{n-1}) + f(x_{n-1})$	$\mathbf{x_n} = x_{n-1}-f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})$	**Abweichung** $\lvert x_n-x_{n-1}\rvert$ =	**Nullstelle**
1	1	-7	3	y = 3x - 10	3.3333333333333335	2.3333333333333335	
2	3.3333333333333335	29.037037037037045	33.333333333333336	y = 33.333333333333336x - 82.074074	2.462222222222222	0.8711111111111114	
3	2.462222222222222	6.92731645541838	18.187614814814814	y = 18.187614814814814x - 37.854633	2.081341247671579	0.3808809745506432	
4	2.081341247671579	1.0163315496105625	12.995944167777253	y = 12.995944167777253x - 26.032663	2.003137499141287	0.07820374853029177	
5	2.003137499141287	0.03770908398584538	12.037679521398031	y = 12.037679521398031x - 24.075418	2.000004911675504	0.0031325874657830432	
6	2.000004911675504	0.000058940250797333467	12.000058940178423	y = 12.000058940178423x - 24.000118	2.0000000000120623	0.00000491166344174232	
7	2.0000000000120623	1.447482134153688e-10	12.000000000144748	y = 12.000000000144748x - 24	2	1.20623511179474e-11	
							f(2) = 0

Beispiel 2: Zu der Funktion $f(x) = x^3 + e^{-0,5x}$ ist näherungsweise der Wendepunkt nahe 0 zu bestimmen. Es gilt für die Ableitungen: $f'(x) = 3x^2 - 0,5e^{-0,5x}$, $f''(x) = 6x + 0,25e^{-0,5x}$. Die 2. Ableitung ist dann zur Bestimmung des Wendepunktes gleich 0 zu setzen, jedoch ist die Gleichung $6x + 0,25e^{-0,5x} = 0$ algebraisch nicht lösbar. Es sei daher die Funktion im Newtonverfahren: $\Phi(x) = f''(x) = 6x + 0,25e^{-0,5x}$ definiert und abgeleitet: $\Phi'(x) = 6 - 0,125e^{-0,5x}$, so dass als Iterationsgleichung gilt: $x_{n+1} = x_n - \frac{\Phi(x_n)}{\Phi'(x_n)} = x_n - \frac{6x_n + 0,25e^{-0,5x_n}}{6 - 0,125e^{-0,5x_n}}$. Damit ergibt sich die Iterationstabelle:

Newtonverfahren: f(x) = **6x+0.25e$^{-0.5x}$**, f'(x) = **6-0.125e$^{-0.5x}$**, x_0 = **0**

Iteration n =	**x_{n-1}** =	**f(x_{n-1})** =	**f'(x_{n-1})** =	**Tangente** y = f'(x_{n-1})(x-x_{n-1}) + f(x_{n-1})	**x_n** = x_{n-1}-f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})	**Abweichung** |x_n-x_{n-1}| =	**Nullstelle**
1	0	0.25	5.875	y = 5.875x + 0.25	-0.0425531914893617	0.0425531914893617	
2	-0.0425531914893617	0.000056990158677161506	5.872311930452576	y = 5.872311930452576x + 0.249943	-0.04256289638231563	0.000009704892953932287	
3	-0.04256289638231563	3.0065949729873864e-12	5.87231131085155	y = 5.87231131085155x + 0.249943	-0.04256289638282763	5.119932255936988e-13	
							f(-0.04256289638282763) = 0

Beispiel 3: Zur Bestimmung von Schnittstellen von zwei Funktionen f(x) und g(x) ist das Newtonverfahren über die Differenzfunktion d(x) = f(x)–g(x) zu nehmen; Schnittpunkte der Funktionen sind nämlich Nullstellen der Differenzfunktion. Es seien gegeben: $f(x) = 4 \cdot \sin x$, $g(x) = e^{-x}$. Die Differenzfunktion lautet: $d(x) = f(x) - g(x) = 4 \cdot \sin x - e^{-x}$, deren Ableitung heißt: $d'(x) = 4 \cdot \cos x + e^{-x}$. Es gibt unendlich viele Schnittstellen der beiden Funktionen, es sollen daher die ersten Schnittstellen mit positivem x-Wert gemäß der Iteration $x_{n+1} = x_n - \frac{d(x_n)}{d'(x_n)} = x_n - \frac{4\sin x_n - e^{-x_n}}{4\cos x_n + e^{-x_n}}$ bestimmt werden:

Newtonverfahren: $f(x) = \mathbf{4\sin(x)-e^{-x}}$, $f'(x) = \mathbf{4\cos(x)+ e^{-x}}$

$x_0 = \mathbf{0}$

Iteration n =	$x_n = x_{n-1}-f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})$	**Nullstelle**
	0	
1	0.2	
2	0.2050756372225279	
3	0.20508004453594702	
4	0.20508004453929163	
		f(0.20508004453929163)=0

$x_0 = \mathbf{3}$

Iteration n =	$x_n = x_{n-1}-f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})$	**Nullstelle**
	3	
1	3.1316288712473836	
2	3.1306703206294406	
3	3.1306703107826172	
4	3.1306703107826172	
		f(3.1306703107826172)=0

$x_0 = \mathbf{6}$

Iteration n =	$x_n = x_{n-1}-f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})$	**Nullstelle**
	6	
1	6.291463476533594	
2	6.283651762867617	
3	6.283651950073052	
4	6.283651950073052	
		f(6.283651950073052)=0

Beispiel 4: Besondere Werte wie z.B. ln*2* bestimmt man, indem das Problem in eine entsprechende Gleichung einkleidet, hier: $e^x = 2$. Der Gleichung entspricht die Nullstelle der Funktion $f(x) = e^x - 2$. Die Iteration im Newtonverfahren lautet:

Newtonverfahren: $f(x) = \mathbf{e^x-2}$, $f'(x) = \mathbf{e^x}$, $x_0 = \mathbf{0}$

Iteration n =	$x_n = x_{n-1}-f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})$	**Nullstelle**
	0	
1	1	
2	0.7357588823428847	
3	0.6940422999189153	
4	0.6931475810597714	
5	0.6931471805600254	
6	0.6931471805599453	
		f(0.6931471805599453) = 0

Also ist: ln*2* = 0.6931471805599453.

Beispiel 5: Es ist ein Näherungswert für die reelle Zahl $\sqrt{2}$ zu bestimmen. Um das Newtonverfahren anzuwenden, definiert man die Parabelfunktion $f(x) = x^2 - 2$, die offensichtlich bei x_N = $\sqrt{2}$ eine Nullstelle hat. Wegen $f'(x) = 2x$ ergibt sich die Iterationsfolge:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \quad (*)$$

und weiter die Iterationstabelle:

Newtonverfahren: f(x) = **x^2-2**, f'(x) = **2x**, x_0 = **1**

Iteration n =	**x_n** = x_{n-1}-f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})	**Nullstelle**
	1	
1	1.5	
2	1.4166666666666667	
3	1.4142156862745098	
4	1.4142135623746898	
5	1.4142135623730951	
		f(1.4142135623730951) = 0

Es ist damit: $\sqrt{2}$ = 1.4142135623730951.

Allgemein gilt – ähnlich (*) – für die Bestimmung von Quadratwurzeln $\sqrt{a}$, a>0, das schon aus der menschlichen Antike bekannte Heron-Verfahren:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n}, \; x_0 = a \; (**)$$

Ein verallgemeinertes Heron-Verfahren zur Bestimmung von allgemeinen Wurzeln $\sqrt[r]{a}$, a>0, r natürliche Zahl, ergibt sich mit $f(x) = x^r - a$, $f'(x) = rx^{r-1}$ und der Iterationsfolge:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^r - a}{rx_n^{r-1}} = x_n - \frac{x_n}{r} + \frac{a}{rx_n^{r-1}} = \frac{(r-1)x_n}{r} + \frac{a}{rx_n^{r-1}} \text{ als: } x_{n+1} = \frac{(r-1)x_n}{r} + \frac{a}{rx_n^{r-1}}, \; x_0 = a \; (***)$$

So lässt sich vermöge (***) die Wurzel $\sqrt[7]{5040}$ = 3.3800151591412963 bestimmen mit:

Iteration zur Bestimmung von $\sqrt[7]{5040}$: $x_{n+1} = 6x_n/7 + 5040/7/x_n^6$, $x_0 = 100$

Schritt n =	**Näherung zu $\sqrt[7]{5040}$** x_n =	**Schritt** n =	**Näherung zu $\sqrt[7]{5040}$** x_n =	**Schritt** n =	**Näherung zu $\sqrt[7]{5040}$** x_n =	**Schritt** n =	**Näherung zu $\sqrt[7]{5040}$** x_n =
0	100	8	29.135715886070237	16	8.490054715687121	24	3.3817990774579787
1	85.7142857150057	9	24.973471936493848	17	7.279112270526817	25	3.380017979741903
2	73.46938775753473	10	21.405836056389493	18	6.24407927433462	26	3.380015159148358
3	62.97376093960796	11	18.34786696100089	19	5.364216432345142	27	3.380015159141297
4	53.977509388351315	12	15.726761981476002	20	4.62811981886154	28	3.380015159141296
5	46.26643664769773	13	13.480129286315934	21	4.040226258180499	29	3.3800151591412963
6	39.656945771433406	14	11.554516527509845	22	3.628589334337566	30	3.3800151591412963
7	33.99166798919025	15	9.904173876481193	23	3.425651304976211		