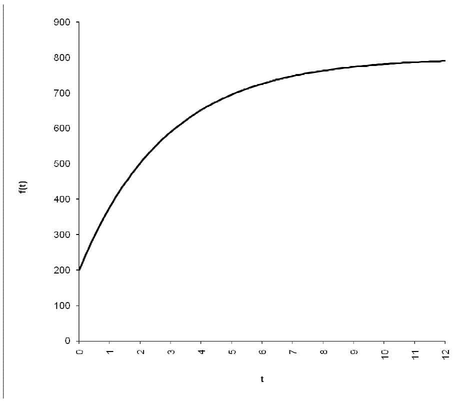
Michael Buhlmann

Mathematik-Formelsammlung
> Analysis
> Wachstum
> Beschränktes Wachstum

Die Modellierung von Wachstumsprozessen geschieht in der Mathematik häufig über die natürliche Exponentialfunktion $y = e^t$ (e = Eulersche Zahl; t meist für die Zeitachse, t≥0, reell). y = f(t) gibt den reellen Wert (Bestand) einer mathematischen Größe zum (Zeit-) Punkt t an. Die Ableitung f'(t) steht für die Änderungsrate.

Beschränktes Wachstum (stetig, differenzierbar)			
			
Differenzialgleichung	$f'(t) = k \cdot (S - f(t))$	k Proportionalitätsfaktor k>0	S Schranke
Wachstumsfunktion	$f(t) = S - ce^{-kt}$		
Änderungsrate	$f'(t) = cke^{-kt}$		
Anfangswert	$f(0) = a$ $f(0) = S - c$	$c = S - a$ $c = S - f(0)$	$S = a + c$ $S = f(0) + c$
	$f(0) = 0$ a = 0	$c = S$	$f(t) = S(1 - e^{-kt})$
Auswertung	$y_0 = f(t_0)$	$y_0 = S - ce^{-kt_0}$	y_0 Bestand
	$y_1 = f'(t_0)$	$y_1 = cke^{-kt_0}$	y_1 Bestandsänderung
	$f(t_0) = y_0$	$t_0 = -\frac{\ln \frac{S - y_0}{c}}{k}$	t_0 Zeit o.a.
	$f'(t_1) = y_1$	$t_1 = -\frac{\ln \frac{y_1}{ck}}{k}$	t_1 Zeit o.a.

Bestimmung	$c = S - f(0)$	$f(t) \to S$ (t->∞)	
	$f(t_0) = y_0$	$S = y_0 + ce^{-kt_0}$	$c = (S - y_0)e^{kt_0}$
		$k = -\frac{\ln \frac{S - y_0}{c}}{t_0}$	
$(t_1 \mid y_1)$, $(t_2 \mid y_2)$	$f(t_1) = y_1$ $f(t_2) = y_2$	$k = \frac{\ln y_1 - \ln y_2}{t_1 - t_2}$	$c = \frac{y_1}{e^{kt_1}}$
Beschränktes Wachstum (stetig, differenzierbar)			

Beschränktes Wachstum (diskret)			
Wachstumsfunktion	$B(n+1) = B(n) + k_b \cdot (S - B(n))$		$0<k_b<1$
Anfangswert	$B(0) = a$		
Auswertung	$B(1) = B(0) + k_b(S - B(0))$ $B(1) = a + k_a(S - a)$		
iterativ	$B(2) = B(1) + k_b(S - B(1))$		…
explizit	$B(n) = S - ce^{-kn}$		$k = -\ln(1 - k_b)$
	$S = \frac{B(1) - B(0)}{k_b} + B(0)$		$k = -\ln \frac{S - B(1)}{S - B(0)}$
	$c = S - B(0)$	$c = S - a$	
Bestimmung	$a = B(0)$	$S = \frac{B(1) - B(0)}{k_b} + B(0)$	
		$k_b = \frac{B(1) - B(0)}{S - B(0)}$	
		$B(0) = \frac{B(1) - k_b S}{1 - k_b}$	
		$S = \frac{B(n+1) - B(n)}{k_b} + B(n)$	
		$k_b = \frac{B(n+1) - B(n)}{S - B(n)}$	
		$B(n) = \frac{B(n+1) - k_b S}{1 - k_b}$	
			n є **N**
Beschränktes Wachstum (diskret)			