Michael Buhlmann

Mathematik > Analysis > Zusammenfassung

Funktionen

Funktionen sind Abbildungen f: D_f -> **R** von reellen Zahlen in reelle Zahlen, d.h.: sie ordnen vermöge einer Zuordnung x -> f(x) = y (Funktionsterm) jedem reellen x des (maximalen) Definitionsbereichs D_f genau ein reelles y des Wertebereichs W_f zu. Funktionen können vervielfacht, addiert, subtrahiert, multipliziert, dividiert, potenziert, verknüpft werden, d.h. es gilt: r·f(x), f(x)+g(x), f(x)-g(x), f(x)·g(x), f(x)/g(x), $f(x)^{g(x)}$ und g(f(x)) sind reguläre Funktionsterme. Funktionen erscheinen in der Analysis als ganz und gebrochen rationale Funktionen, Exponential- und trigonometrische Funktionen.

Gerade: $y = mx + c$
Allgemeine Parabel: $f(x) = ax^2 + bx + c$
Ganz rationale Funktionen: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$
Gebrochen rationale Funktionen: $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0}$
Trigonometrische Funktionen: $f(x) = a \cdot \sin(b(x-c)) + d$, $f(x) = a \cdot \cos(b(x-c)) + d$
Natürliche Exponentialfunktionen: $f(x) = a \cdot e^{bx+c} + d$ o.ä.

Funktionen

Gleichungen

$ax^2 + bx + c = 0$			
a ≠ 0, b = 0	a ≠ 0, c = 0	a ≠ 0, b ≠ 0, c ≠ 0	a =1, b = p, c = q
$ax^2 + c = 0$ $ax^2 = -c$ $x^2 = -\frac{c}{a}$ $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$	$ax^2 + bx = 0$ $x(ax+b) = 0$ $x = 0 \vee ax + b = 0$ $x = 0 \vee ax = -b$ $x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$	$ax^2 + bx + c = 0$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 + px + q = 0$ $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
Rein quadratische Gleichung: 0 Lösungen (bei $-\frac{c}{a}$<0), 1 Lösung (bei c=0), 2 Lösungen (bei $-\frac{c}{a}$>0)	Gemischt quadratische Gleichung (Ausklammern): 2 Lösungen	Gemischt quadratische Gleichung (Mitternachtsformel): D = $b^2 - 4ac$ als Diskriminante -> 0 Lösungen (bei D<0) 1 Lösung (bei D=0) 2 Lösungen (bei D>0)	Gemischt quadratische Gleichung (p-q-Formel): D = $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ als Diskriminante -> 0 Lösungen (bei D<0) 1 Lösung (bei D=0) 2 Lösungen (bei D>0)
	Quadratische Gleichung hat die Form: $ax(x - x_1) = 0$ (bei 2 Lösungen $x = 0$, $x = x_1 = -\frac{b}{a}$)	Quadratische Gleichung hat die Form: $a(x - x_1)^2 = 0$ (bei 1 Lösung $x = x_1$), $a(x-x_1)(x-x_2) = 0$ (bei 2 Lsg. $x = x_1$, $x = x_2$)	Quadratische Gleichung hat die Form: $(x - x_1)^2 = 0$ (bei 1 Lösung $x = x_1$), $(x-x_1)(x-x_2) = 0$ (bei 2 Lsg. $x = x_1$, $x = x_2$)

Quadratische Gleichungen

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$
Ausklammern (und Satz vom Nullprodukt):
$ax^n+\dots+bx^m = 0 \Leftrightarrow x^m(ax^{n-m}+\dots+b) = 0 \Leftrightarrow x=0, ax^{n-m}+\dots+b = 0$
Substitution:
$ax^4 + bx^2 + c = 0$ | Substitution: $z=x^2$
$az^2 + bz+c =0$
$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ | (Rücksubstitution)
$x^2 = z_1$, $x^2 = z_2$ | √
$x = \pm\sqrt{z_1}$, $x = \pm\sqrt{z_2}$ (falls $z_1, z_2 > 0$)

Polynomgleichungen

Einfache Exponentialgleichungen:
$ae^{bx+c} = d \Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{d}{a}\right)-c}{b}$
Quadratische Exponentialgleichungen:
$ae^{2x} + be^x + c = 0$ | Substitution: $z=e^x$
$az^2 + bz+c =0$
$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ | (Rücksubstitution)
$e^x = z_1$, $e^x = z_2$ | ln()
$x = \ln(z_1)$, $x = \ln(z_2)$ (falls $z_1, z_2 > 0$)

Exponentialgleichungen

Einfache trigonometrische Gleichungen:	
$\sin(bx) = r$	$\cos(bx) = r$
r = -1: x=3π/2b usw. r = 0: x=0, x=π/b, x=2π/b usw. r = 1: x=π/2b usw.	r = -1: x=π/b usw. r = 0: x=π/2b, x=3π/2b usw. r = 1: x=0, x=2π/b usw.
	$b \neq 0$, $0 \leq x \leq 2\pi$
Quadratische trigonometrische Gleichungen:	
$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$ | Substitution: $z=\sin x$	$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$ | Substitution: $z=\cos x$
$az^2 + bz+c =0$	
$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ | (Rücksubstitution)	
$\sin x = z_1$, $\sin x = z_2$	$\cos x = z_1$, $\cos x = z_2$
	$0 \leq x \leq 2\pi$

Trigonometrische Gleichungen

Integralgleichungen:
$\int_a^x f(t)dt = r \Leftrightarrow [F(t)]_a^x = r \Leftrightarrow F(x)-F(a) = r \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x =$ (Lösung[en])

Integralgleichungen

Differentiation, Integration

Ableitungsregeln (Funktionen u(x), v(x)):	*Aufleitungsregeln* (Funktionen u(x), v(x)):
$(u(x)+v(x))' = u'(x)+v'(x)$ (Summenregel)	$\int (u(x)+v(x))dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx$ (Summenr.)
$(u(x)+r)' = u'(x)$ (additive Konstante)	
$(ku(x))' = ku'(x)$ (multiplikative Konstante)	$\int (ku(x))dx = k\int u(x)dx$ (multiplikative Konstante)
$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ (Produktregel)	$\int (u'(x)\cdot v(x))dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)dx$ (Produktregel)
$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$ (Quotientenregel)	

$(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ (Kettenregel) $(x^n)' = nx^{n-1}$ (Potenzregel) $((ax+b)^n)' = na(ax+b)^{n-1}$ (Potenzregel) $(\sin x)' = \cos x$ (Sinusfunktion) $(\cos x)' = -\sin x$ (Kosinusfunktion) $(e^x)' = e^x$ (Exponentialfunktion) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ (Natürlicher Logarithmus) $(\sin(ax+b))' = a\cos(ax+b)$ (Sinusfunktion) $(\cos(ax+b))' = -a\sin(ax+b)$ (Kosinusfunktion) $(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$ (Exponentialfunktion) (reelle Konstanten a, b, k, n, r)	$\int u(v(x))v'(x)dx = \int u(v(x))dv(x)$ (Substitutionsregel) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ (Potenzregel, n≠-1) $\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert$ (Potenzregel) $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{a}(ax+b)^{n+1}$ (Potenzregel) $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert$ (Potenzregel) $\int \sin x dx = -\cos x$ (Sinusfunktion) $\int \cos x dx = \sin x$ (Kosinusfunktion) $\int e^x dx = e^x$ (Exponentialfunktion) $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$ (Sinusfunktion) $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$ (Kosinusfunktion) $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}$ (Exponentialfunktion)

Regeln der Differentiation und Integration

Möglichkeit 1	**Möglichkeit 2**
Funktion f(x), Stelle x_0	Funktion f(x), Stelle x_0
1. Ableitung f'(x)	1. Ableitung f'(x)
Funktionswert $f(x_0)$, Steigung $f'(x_0)$	Ansatz: y = mx + c als Tangentenformel
Einsetzen in Tangentenformel	Steigung $m = f'(x_0)$
Tangente: t: $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$	y-Achsen-Abschnitt $c = f(x_0) - mx_0$

Tangentengleichung

Möglichkeit 1	**Möglichkeit 2**
Funktion f(x), Stelle x_0	Funktion f(x), Stelle x_0
1. Ableitung f'(x)	1. Ableitung f'(x)
Funktionswert $f(x_0)$, Steigung $f'(x_0)$	Ansatz: y = mx + c als Normalenformel
Einsetzen in Normalenformel	Steigung $m = -\frac{1}{f'(x_0)}$
Normale: n: $y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) + f(x_0)$	y-Achsen-Abschnitt $c = f(x_0) - mx_0$

Normalengleichung

Vorgehensweise:
Funktion f(x) -> Integrationsregeln -> F(x) als eine Stammfunktion von f(x) mit. F'(x) = f(x)
Vorgehensweise:
Zu einer Funktion f(x) ist die Menge der Stammfunktionen F(x) eine Schar paralleler Kurven, die sich durch eine Integrationskonstante C voneinander unterscheiden. Einer speziellen Stammfunktion F(x) durch einen Punkt $P(x_0\|y_0)$ entspricht eine Integrationskonstante C, bestimmbar über $F(x_0) = y_0$ und mit $F_0(x)$ als schon errechneter Stammfunktion zu f(x), so dass $C = y_0 - F_0(x_0)$ und $F(x) = F_0(x) + C$ gilt.

Stammfunktion

Vorgehensweise:
Integralfunktion als Stammfunktion: $$I_a(x) = \int_a^x f(t)dt$$ mit: $\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt = I_a(x_2) - I_a(x_1)$, $I_a'(x) = f(x)$.

Funktion der oberen Grenze, Integralfunktion

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$
Vorgehensweise:
Bestimmung einer Stammfunktion F(x) zu f(x)
Einsetzen der oberen und der unteren Grenze b und a in die Stammfunktion
Stammfunktionswert der oberen Grenze minus Stammfunktionswert der unteren Grenze bilden
Integrationsgrenzen:
$\int_a^a f(x)dx = 0$, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (für reelle a, b, c)

Bestimmtes Integral

Vorgehensweise:
Eine auf dem Intervall [a; b] definierte, integrierbare Funktion f(x) hat als Mittelwert: $$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Mittelwert einer Funktion

Vorgehensweise:
Bestimmung der Nullstellen einer Funktion f(x): f(x) = 0 (auf einem Intervall [a; b]). (Intervallgrenzen und) Nullstellen sind: x_1, x_2, x_3, …
Bestimmung einer Stammfunktion F(x) zu f(x)
Errechnung der bestimmten Integrale als Teilflächen: $\pm A_1 = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = [F(x)]_{x_1}^{x_2}$, $\pm A_2 = \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx = [F(x)]_{x_2}^{x_3}$, …
Aufaddieren der Teilflächen zur Gesamtfläche: $A = A_1 + A_2 + …$

Fläche zwischen Funktion und x-Achse

Vorgehensweise:
Bestimmung der Schnittstellen zweier Funktionen f(x) und g(x): f(x) = g(x) (auf einem Intervall [a; b]). (Intervallgrenzen und) Schnittstellen sind: x_1, x_2, x_3, … (n Schnittstellen, n-1 Flächen)
Bestimmung einer Stammfunktion H(x) zu h(x) = f(x) – g(x) (Differenzfunktion h(x) vereinfachen)
Errechnung der bestimmten Integrale als Teilflächen: $\pm A_1 = \int_{x_1}^{x_2} h(x)dx = [H(x)]_{x_1}^{x_2}$, $\pm A_2 = \int_{x_2}^{x_3} h(x)dx = [H(x)]_{x_2}^{x_3}$, …
Aufaddieren der Teilflächen zur Gesamtfläche: $A = A_1 + A_2 + …$

Fläche zwischen zwei Funktionen

Vorgehensweise:
Uneigentliches Integral 1. Art (±∞ als Integrationsgrenze, im Fall der Existenz): $$I(u) = \int_{x_0}^{u} f(x)dx = [F(x)]_{x_0}^{u} = F(u) - F(x_0) \underset{u \to \infty}{->} I = \int_a^\infty f(x)dx$$
Uneigentliches Integral 2. Art (a als Pol der Funktion und als Integrationsgrenze, im Fall der Existenz): $$I(u) = \int_u^b f(x)dx = [F(x)]_u^b = F(b) - F(u) \underset{u \to a}{->} I = \int_a^b f(x)dx$$

Uneigentliche Integrale

Vorgehensweise:
Funktion f(x) (≥0) auf einem Intervall [a; b] (Intervallgrenzen a, b)
Bestimmung einer Stammfunktion H(x) zu $h(x) = (f(x))^2 \geq 0$

Errechnung des bestimmten Integrals als Volumenintegral des Rotationskörpers: $$V = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx = \pi\left[H(x)\right]_a^b$$

Rotationskörper durch Rotation einer Fläche zwischen Funktion und x-Achse

Vorgehensweise:
Funktionen f(x), g(x) mit f(x) ≥ g(x) ≥0 auf einem Intervall [a; b] (Intervallgrenzen a, b)
Bestimmung einer Stammfunktion H(x) zu $h(x) = (f(x))^2 - (g(x))^2$ (Differenzfunktion h(x) vereinfachen)
Errechnung des bestimmten Integrals als Volumenintegral des Rotationskörpers: $$V = \pi\int_a^b \left(\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2\right)dx = \pi\left[H(x)\right]_a^b$$

Rotationskörper durch Rotation einer Fläche zwischen zwei Funktionen

Funktionsuntersuchungen

Differenzierbare Funktion: f: D_f -> **R** mit Funktionsterm y = f(x), D_f als maximale Definitionsmenge (als **R** [bei ganz rationalen Funktionen, trigonometrischen Funktionen, Exponentialfunktionen] bzw. ohne Nennernullstellen bei Bruchtermen [von gebrochen rationalen Funktionen] bzw. ohne Stellen mit negativen Radikanden [bei Quadratwurzeln] usw.)
I. Ableitungen: f‘(x), f‘‘(x), f‘‘‘(x)
II. Nullstellen (Gleichung f(x) = 0 lösen): f(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> N(x_1|0), N(x_2|0), …
III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Gleichung f‘(x) = 0 lösen, Lösungen in f‘‘(x) einsetzen): a) f‘(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f‘‘(x_1) < 0 -> H(x_1|f(x_1)) oder f‘‘(x_1) > 0 -> T(x_1|f(x_1)); f‘‘(x_2) < 0 -> H(x_2|f(x_2)) oder f‘‘(x_2) > 0 -> T(x_2|f(x_2)); …
IIIa. Punkte mit waagerechter Tangente (Gleichung f‘(x) = 0 lösen): f‘(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> P_1(x_1|f(x_1)), P_2(x_2|f(x_2)), …
IV. Wendepunkte (Gleichung f‘‘(x) = 0 lösen, Lösungen in f‘‘‘(x) einsetzen): a) f‘‘(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f‘‘‘(x_1) ≠ 0 -> W(x_1|f(x_1)); f‘‘‘(x_2) ≠ 0 -> W(x_2|f(x_2)); …
IVa. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach III. und IV.) gilt: f‘(x_0) = 0, f‘‘(x_0) = 0, f‘‘‘(x_0) ≠ 0 -> S(x_0|f(x_0))
V. Polstellen/senkrechte Asymptoten, Lücken: a) Definitionsmenge D_f -> Randstellen der Definitionsmenge D_f => Definitionslücken x_1, x_2, x_3 … b) x->x_1, x>x_1: f(x) -> +∞, x->x_1, x<x_1: f(x) -> -∞ oder: x->x_1, x>x_1: f(x) -> -∞, x->x_1, x<x_1: f(x) -> +∞ => x_1 Polstelle mit Vorzeichenwechsel c) x->x_2, x>x_2: f(x) -> +∞, x->x_2, x<x_2: f(x) -> +∞ oder: x->x_2, x>x_2: f(x) -> -∞, x->x_2, x<x_2: f(x) -> -∞ => x_2 Polstelle ohne Vorzeichenwechsel d) x->x_3: f(x) -> r => x_3 (stetig fortsetzbare, hebbare) (Definitions-) Lücke mit Lückenwert r
VI. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach III.]; bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall): – Monotonieintervall (-∞, x_1): f(x) monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, f‘(x_0)>0) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, f‘(x_0)<0); – Monotonieintervall (x_1, x_2): f(x) monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, f‘(x_0)<0) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie f‘(x_0)>0); … – Monotonieintervall (x_n, ∞): f(x) monoton fallend (x_n als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie f‘(x_0)<0) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, f‘(x_0)>0) Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Monotonieintervalle mit einzubeziehen.
VII. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach [IV.]; bei Wendepunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall): – Krümmungsintervall (-∞, x_1): f(x) links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, f‘‘(x_0)>0) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, f‘‘(x_0)<0); – Krümmungsintervall (x_1, x_2): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, f‘‘(x_0)<0) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, f‘‘(x_0)>0); … – Krümmungsintervall (x_n, ∞): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, f‘‘(x_0)<0) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, f‘‘(x_0)>0) Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Krümmungsintervalle mit einzubeziehen.

VIII. Symmetrie:
a) Achsensymmetrie zur y-Achse: $f(-x) = f(x)$ (gerade)
b) Punktsymmetrie zum Ursprung: $f(-x) = -f(x)$ (ungerade)
c) Vielfache und Summe von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch bzw. zum Ursprung punktsymmetrisch.
d) Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit geraden Exponenten enthalten, sind zur y-Achse achsensymmetrisch. Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit ungeraden Exponenten enthalten, sind zum Ursprung punktsymmetrisch.
d) Produkte und Quotienten von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch. Ist in einem Produkt der eine Faktor zur y-Achse achsensymmetrisch, der andere zum Ursprung punktsymmetrisch, dann ist das Produkt zum Ursprung punktsymmetrisch; Entsprechendes ergibt sich für einen Quotienten aus einer Zähler- und Nennerfunktion.
e) Es gilt für die Ableitungen einer Funktion f(x): f(x) achsensymmetrisch -> f'(x) punktsymmetrisch -> f''(x) achsensymmetrisch usw.; f(x) punktsymmetrisch -> f'(x) achsensymmetrisch -> f''(x) punktsymmetrisch usw.
f) Nicht konstante Funktionen, die zur y-Achse achsensymmetrisch sind, besitzen auf der y-Achse einen Extrempunkt, falls dort definiert.

IX. Verhalten für betragsmäßig große x ($x \to \infty$, $x \to -\infty$):
a) f(x) als ganz rationale Funktion (n als Grad der ganz rationalen Funktion):

$a_n>0$	n ungerade	n gerade
$x \to \infty$	$f(x) \to \infty$	$f(x) \to \infty$
$x \to -\infty$	$f(x) \to -\infty$	$f(x) \to \infty$

$a_n<0$	n ungerade	n gerade
$x \to \infty$	$f(x) \to -\infty$	$f(x) \to -\infty$
$x \to -\infty$	$f(x) \to \infty$	$f(x) \to -\infty$

b) f(x) als gebrochen rationale Funktion (n als Grad der ganz rationalen Funktion im Zähler, m als Grad der ganz rationalen Funktion im Nenner):

$x \to \pm\infty$: $f(x) \to 0 = y$ (n < m)
$x \to \pm\infty$: $f(x) \to a/b = y$ (n = m; a, b Koeffizienten der höchsten Potenz im Zähler bzw. Nenner)
$x \to \pm\infty$: $f(x) \to \pm\infty$ (n > m)

mit y als waagerechter Asymptote.

c) f(x) mit natürlicher Exponentialfunktion als Anteil:

$x \to -\infty$: $e^x \to 0$, $x \to +\infty$: $e^x \to +\infty$
$x \to -\infty$: $f(x) = ae^{bx+c} + d \to \pm\infty$ (b<0), $\to d = y$ (b>0); $x \to +\infty$: $f(x) = ae^{bx+c} + d \to d = y$ (b<0), $\to \pm\infty$ (b>0)
$x \to -\infty$: $f(x) = (a_nx^n+\ldots)e^{bx} \to \pm\infty$ (b<0), $\to 0 = y$ (b>0); $x \to +\infty$: $f(x) = (a_nx^n+\ldots)e^{bx} \to 0 = y$ (b<0), $\to \pm\infty$ (b>0)

mit y als waagerechter Asymptote.

Funktionsuntersuchung von Funktionen (allgemein)

Funktion: $f(x) = a \cdot \sin(b(x-c)) + d$ (a = Amplitude, b = Streckung entlang x-Achse, c = Verschiebung entlang x-Achse, d = Verschiebung entlang y-Achse)

I. Nullstellen (Gleichung f(x) = 0 lösen):
$f(x) = 0 \to x_1, x_2, \ldots \to N(x_1|0), N(x_2|0), \ldots$

II. Hochpunkte, Tiefpunkte:
Periode $p = 2\pi/b \to \ldots, T(c+p/4|d+a), H(c+3p/4|d–a), \ldots$ (a<0); $\ldots, H(c+p/4|d+a), T(c+3p/4|d–a), \ldots$ (a>0)

III. Wendepunkte:
Periode $p = 2\pi/b \to \ldots, W(c|d), W(c+p/2|d), W(c+p|d), \ldots$

Funktion: $f(x) = a \cdot \cos(b(x-c)) + d$ (a = Amplitude, b = Streckung entlang x-Achse, c = Verschiebung entlang x-Achse, d = Verschiebung entlang y-Achse = Mittellinie)

I. Nullstellen (Gleichung f(x) = 0 lösen):
$f(x) = 0 \to x_1, x_2, \ldots \to N(x_1|0), N(x_2|0), \ldots$

II. Hochpunkte, Tiefpunkte:
Periode $p = 2\pi/b \to \ldots, T(c|d+a), H(c+p/2|d–a), \ldots$ (a<0); $\ldots, H(c|d+a), T(c+p/2|d–a), \ldots$ (a>0)

III. Wendepunkte:
Periode $p = 2\pi/b \to \ldots, W(c+p/4|d), W(c+3p/4|d), \ldots$

Funktionsuntersuchung von trigonometrischen Funktionen

Bestimmungsaufgaben

Funktion: y = mx + c (m als Steigung, c als y-Achsen-Abschnitt)	
Punkt $P(x_1\|y_1)$, Steigung m	Punkte $P(x_1\|y_1)$, $Q(x_2\|y_2)$
<u>Punktsteigungsform</u>: $\frac{y-y_1}{x-x_1}=m$	<u>Zweipunkteform</u>: $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
Umstellen zu: $y=m(x-x_1)+y_1$	Umstellen zu: $y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$
	Steigung: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
<u>Ursprungsgerade</u> y = mx (durch den Ursprung): $y=\frac{y_1}{x_1}x$ mit: $m=\frac{y_1}{x_1}$	

Bestimmungsaufgabe für Geraden

Funktion 2. Grades	**Funktion 3. Grades**	**Funktion 4. Grades**
Funktion und Ableitungen:		
$f(x)=ax^2+bx+c$ $f'(x)=2ax+b$	$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ $f''(x)=6ax+2b$	$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$ $f''(x)=12ax^2+6bx+2c$
3 Unbekannte a, b, c-> 3 Funktionseigenschaften -> 3 Gleichungen	4 Unbekannte a, b, c, d -> 4 Funktionseigenschaften -> 4 Gleichungen	5 Unbekannte a, b, c, d, e -> 5 Funktionseigenschaften -> 5 Gleichungen
Lineare Gleichungen vom Typ:		
$f(x_1)=ax_1^2+bx_1+c=y_1$ $f'(x_2)=2ax_2+b=y_2$	$f(x_1)=ax_1^3+bx_1^2+cx_1+d=y_1$ $f'(x_2)=3ax_2^2+2bx_2+c=y_2$ $f''(x_3)=6ax_3+2b=y_3$	$f(x_1)=ax_1^4+bx_1^3+cx_1^2+dx_1+e=y_1$ $f'(x_2)=4ax_2^3+3bx_1^3+2cx_2+d=y_2$ $f''(x_3)=12ax_3^2+6bx_3+2c=y_3$
für bestimmte x- und y-Werte		
Funktion 2. Grades (Symmetrie zur y-Achse) (f(-x) = f(x))	**Funktion 3. Grades (Symmetrie zum Ursprung)** (f(-x) = -f(x))	**Funktion 4. Grades (Symmetrie zur y-Achse)** (f(-x) = f(x))
$f(x)=ax^2+c$ $f'(x)=2ax$	$f(x)=ax^3+cx$ $f'(x)=3ax^2+c$ $f''(x)=6ax$	$f(x)=ax^4+cx^2+e$ $f'(x)=4ax^3+2cx$ $f''(x)=12ax^2+2c$
2 Unbekannte a, c-> 2 Funktionseigenschaften -> 2 Gleichungen	2 Unbekannte a, c -> 2 Funktionseigenschaften -> 2 Gleichungen	3 Unbekannte a, c, e -> 3 Funktionseigenschaften -> 3 Gleichungen
Lineare Gleichungen vom Typ:		
$f(x_1)=ax_1^2+c=y_1$ $f'(x_2)=2ax_2=y_2$	$f(x_1)=ax_1^3+cx_1=y_1$ $f'(x_2)=3ax_2^2+c=y_2$ $f''(x_3)=6ax_3=y_3$	$f(x_1)=ax_1^4+cx_1^2+e=y_1$ $f'(x_2)=4ax_2^3+2cx_2=y_2$ $f''(x_3)=12ax_3^2+2c=y_3$
für bestimmte x- und y-Werte		
Funktion 2. Grades	**Funktion 3. Grades**	**Funktion 4. Grades**
Funktion 2. Grades (Symmetrie zur y-Achse) (f(-x) = f(x))	**Funktion 3. Grades (Symmetrie zum Ursprung)** (f(-x) = -f(x))	**Funktion 4. Grades (Symmetrie zur y-Achse)** (f(-x) = f(x))
Aufstellen des linearen Gleichungssystems: Gleichungen mit Unbekannten a, b, … bzw. a, c, … gemäß den Funktionseigenschaften:		
Punkt $P(x_1\|y_1)$:	$f(x_1) = y_1$	
Nullstelle x_0 bzw. $N(x_0\|0)$:	$f(x_0) = 0$	
Ursprung O(0|0) als Funktionspunkt:	f(0) = 0	
y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0\|y_0)$:	$f(0) = y_0$	
Schnittstelle x_1 mit Funktion g(x):	$f(x_1) = g(x_1)$	
Steigung m in x_1:	$f'(x_1) = m$	
Berührpunkt x_1 mit der x-Achse:	$f(x_1) = 0$, $f'(x_1) = 0$	

Ursprung O(0|0) als Berührpunkt:	f(0) = 0, f'(0) = 0
Tangente y = mx+c in x_1:	$f(x_1) = y(x_1) = mx_1+c$, $f'(x_1) = m$
Normale y = mx+c in x_1:	$f(x_1) = y(x_1) = mx_1+c$, $f'(x_1) = -1/m$
Berührpunkt x_1 mit Funktion g(x):	$f(x_1) = g(x_1)$, $f'(x_1) = g'(x_1)$
Hoch-/Tiefpunkt x_E:	$f'(x_E) = 0$
Hoch-/Tiefpunkt H/T(x_E|$y_{€}$):	$f(x_E) = y_E$, $f'(x_E) = 0$
Krümmung k in x_1:	$f''(x_1) = k$
Wendepunkt x_W:	$f''(x_W) = 0$
Wendepunkt W(x_W|y_W):	$f(x_W) = y_W$, $f''(x_W) = 0$
Wendetangente y = mx+c in x_W:	$f(x_W) = y(x_W) = mx_W+c$, $f'(x_W) = m$, $f''(x_W) = 0$
Wendenormale y = mx+c in x_W:	$f(x_W) = y(x_W) = mx_W+c$, $f'(x_W) = -1/m$, $f''(x_W) = 0$
Sattelpunkt x_S:	$f'(x_S) = 0$, $f''(x_S) = 0$
Sattelpunkt S(x_S|y_S)::	$f(x_S) = y_S$, $f'(x_S) = 0$, $f''(x_S) = 0$

Funktion 2. Grades	**Funktion 3. Grades**	**Funktion 4. Grades**
Lösen des linearen Gleichungssystems (etwa mit dem Gauß-Algorithmus) -> Errechnung der Unbekannten a, b, … ->		
Funktion 2. Grades (Symmetrie zur y-Achse) (f(-x) = f(x))	**Funktion 3. Grades (Symmetrie zum Ursprung)** (f(-x) = -f(x))	**Funktion 4. Grades (Symmetrie zur y-Achse)** (f(-x) = f(x))
Lösen des linearen Gleichungssystems (etwa mit dem Gauß-Algorithmus) -> Errechnung der Unbekannten a, c, … ->		
Funktion 2. Grades	**Funktion 3. Grades**	**Funktion 4. Grades**
Aufstellen der Funktionsgleichung:		
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
Funktion 2. Grades (Symmetrie zur y-Achse) (f(-x) = f(x))	**Funktion 3. Grades (Symmetrie zum Ursprung)** (f(-x) = -f(x))	**Funktion 4. Grades (Symmetrie zur y-Achse)** (f(-x) = f(x))
Aufstellen der Funktionsgleichung:		
$f(x) = ax^2 + c$	$f(x) = ax^3 + cx$	$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$

Bestimmungsaufgabe für ganz rationale (symmetrische) Funktionen (2.-4. Grades)

Ganz rationale Funktion f(x) vom Grad n
Vorgegebene Nullstellen $x_1, x_2, \dots x_k$ der Funktion f(x) mit Vielfachheiten $n_1, n_2, \dots n_k$, $n_1+n_2+\dots+n_k = n$: $N(x_1\|0), N(x_2\|0), \dots N(x_k\|0)$ -> $f(x) = a(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}...(x-x_k)^{n_k}$
Vorgegebener Punkt $P(x_0\|y_0)$: $f(x_0) = y_0$ -> a
Aufstellen der Funktionsgleichung: $f(x) = a(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}...(x-x_k)^{n_k}$

Bestimmungsaufgabe für ganz rationale Funktionen (2.-4. Grades, Produktdarstellung)

Grafisches Ab- und Aufleiten

Bzgl. der Null-, Extrem- und Wendestellen sowie der Monotonie und Krümmung ergibt sich der folgende Zusammenhang zwischen Funktionen f(x), Ableitungen f'(x), f''(x) und Stammfunktionen F(x) und bei asymptotischem Verhalten:

Stammfunktion F(x)	**Funktion f(x)**
Hochpunkt bei x_E	Nullstelle bei x_E VZW von + nach -
Tiefpunkt bei x_E	Nullstelle bei x_E VZW von - nach +
steigende Monotonie in x	$f(x) \geq 0$
fallende Monotonie in x	$f(x) \leq 0$
Wendestelle bei x_W	Hoch-/Tiefpkt bei x_W
Wendestelle als Sattelpunkt bei x_W	(doppelte) Nullstelle bei x_W Hoch-/Tiefpkt bei x_W
Linkskrümmung in x	steigende Monotonie in x
Rechtskrümmung in x	fallende Monotonie in x
$x \to \pm\infty$: $F(x) \to ax + C$	$x \to \pm\infty$: $f(x) \to a$
$x \to \pm\infty$: $F(x) \to C$	$x \to \pm\infty$: $f(x) \to 0$

Funktion f(x)	**Ableitung f'(x)**
Hochpunkt bei x_E	Nullstelle bei x_E VZW von + nach -
Tiefpunkt bei x_E	Nullstelle bei x_E VZW von - nach +
steigende Monotonie in x	$f'(x) \geq 0$
fallende Monotonie in x	$f'(x) \leq 0$
Wendestelle bei x_W	Hoch-/Tiefpkt bei x_W
Wendestelle als Sattelpunkt bei x_W	(doppelte) Nullstelle bei x_W Hoch-/Tiefpkt bei x_W
Linkskrümmung in x	steigende Monotonie in x, $[f''(x) \geq 0]$
Rechtskrümmung in x	fallende Monotonie in x, $[f''(x) \leq 0]$
$x \to \pm\infty$: $f(x) \to ax + C$	$x \to \pm\infty$: $f'(x) \to a$
$x \to \pm\infty$: $f(x) \to C$	$x \to \pm\infty$: $f'(x) \to 0$

Es gilt also im Allgemeinen beim Ableiten:

$$Wendestelle \xrightarrow{'} Extremstelle \xrightarrow{'} Nullstelle,$$

beim Aufleiten:

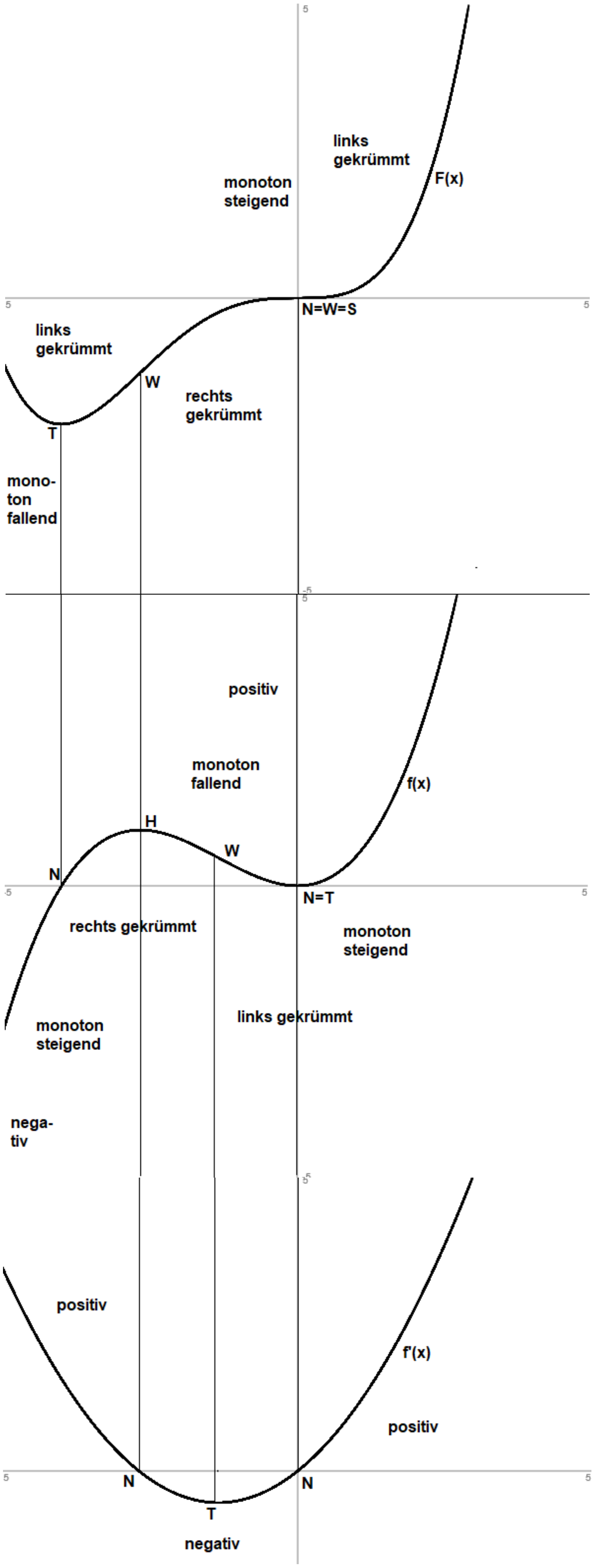
$$Nullstelle \xrightarrow{\int} Extremstelle \xrightarrow{\int} Wendestelle$$

oder die NEW-Regel:

```
F(x)    N E W
f(x)      N E W
f'(x)       N E W
```

Symmetrieeigenschaften (zur y-Achse, zum Ursprung) spielen auch eine Rolle:

a) Die Ableitung f'(x) einer achsensymmetrischen Funktion f(x) ist punktsymmetrisch. b) Die Ableitung f'(x) einer punktsymmetrischen Funktion f(x) ist achsensymmetrisch. c) Für eine punktsymmetrische Funktion f(x) ist jede Stammfunktion F(x) achsensymmetrisch. d) Für eine y-achsen-symmetrische Funktion f(x) existiert eine punktsymmetrische Stammfunktion mit F(0) = 0.



H = Hochpunkt, N = Nullstelle, S = Sattelpunkt, T = Tiefpunkt, W = Wendepunkt