|Michael Buhlmann

Mathematik > Beweisverfahren > Dreiecksungleichung

Einleitung

Grundlage auch für die Dreiecksungleichung(en) ist der Körper der reellen Zahlen (**R**, +, ·) mit der Addition und Multiplikation als Rechenoperationen induzierende Verknüpfungen zwischen den Elementen, der 0 als neutralem Element bzgl. der Addition, der 1 als neutralem Element bzgl. der Multiplikation, der algebraischen kommutativen Gruppen (**R**, +) und (**R**\{0}, ·) (Assoziativgesetz, Gesetz der inversen Elemente, Kommutativgesetz) sowie den die Verknüpfungen verbindenden Distributivgesetzen. Auf dem Zahlbereich der reellen Zahlen lässt sich zudem vermittels „≤" eine totale Ordnung definieren, so dass im geordneten Körper (**R**, +, ·, ≤) reelle Zahlen miteinander vergleichbar sind (bei $-\infty<x<\infty$ für jede reelle Zahl x; abgeschlossene, offene, halboffene Intervalle [a; b], (a; b], [a; b), (a; b) für reelle Zahlen a, b mit: a<b) und neben Gleichungen auch Ungleichungen algebraisch umgeformt werden können. Auch definieren der Körper der reellen Zahlen einen metrischen Raum, d.h.: der Betrag **| |** der Differenz zweier reeller Zahlen definiert eine Metrik, die wiederum die für die reellen Zahlen typische Topologie (eines Hausdorff-Raums) induziert (Trennungsaxiom T_2). Topologie und Ordnung entsprechen dabei einander. Zudem sind die reellen Zahlen vollständig, d.h.: die Grenzwerte von Folgen reeller Zahlen sind wieder reell.

Dreiecksungleichungen

Im reellen Zahlenraum ist der (Absolut-) Betrag (als vorzeichenlose „Größe") einer Zahl a definiert als:

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}.$$

Auf der reellen Zahlengerade gibt der Betrag also den Abstand der Zahl von der Zahl 0 an. Es gilt für alle reellen Zahlen a, b die sog. Dreiecksungleichung:

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

und die umgekehrte Dreiecksungleichung:

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a-b| .$$

Beweisabfolge

Um die Dreiecksungleichungen zu beweisen, gehen wir in mehreren Schritten vor:

Schritt 1: Für eine reelle Zahl a gilt: -|a| ≤ a ≤ |a|.

Beweis: I. Wir nehmen zunächst a≥0 an, so dass |a| = a gilt. Dann ist: -|a| = -a < a = |a|. II. Ist a<0, so ist |a| = -a mit: -|a| = -(-a) = a < -a = |a|. III. In jedem Fall ergibt sich die voranstehende Behauptung: -|a| ≤ a ≤ |a|.

Schritt 2: Für zwei reelle Zahlen a, b gilt die Äquivalenz: |a| ≤ b ⇔ -b ≤ a ≤ b.

Beweis: a) Wir beweisen die Hinrichtung: |a| ≤ b => -b ≤ a ≤ b. I. Wir nehmen dazu a≥0 an, so dass |a| = a gilt. Dann ist auch wegen b ≥ 0 ⇔ -b ≤ 0: -b ≤ 0 ≤ a = |a| ≤ b, also: -b ≤ a ≤ b. II. Ist a<0, so ist |a| = -a, und es gilt: -a ≤ b ⇔ a ≥ -b, so dass: -b ≤ a ≤ 0 ≤ -a = |a| ≤ b erfüllt ist, also: -b ≤ a ≤ b. In jedem Fall ist: -b ≤ a ≤ b.
b) Wir beweisen die Rückrichtung: -b ≤ a ≤ b => |a| ≤ b. I. Ist a≥0, so ist: |a| = a und wegen: a ≤ b: |a| = a ≤ b, also: |a| ≤ b. II. Ist a<0, so ist |a| = -a und damit wegen der Beziehung: -b ≤ a ⇔ b ≥ -a: |a| = -a ≤ b, also: |a| ≤ b. In jedem Fall ist: |a| ≤ b.

Schritt 3: Es gilt für zwei reelle Zahlen a, b die Dreiecksungleichung: $|a+b| \leq |a| + |b|$.

Beweis: Gemäß Schritt 1 gilt für zwei reelle Zahlen a, b: $-|a| \le a \le |a|$, $-|b| \le b \le |b|$. Addition der beiden Ungleichungsketten führt auf:

$$-|a| - |b| \le a + b \le |a| + |b| \Leftrightarrow -(|a| + |b|) \le a + b \le |a| + |b|.$$

Nun gilt nach der Rückrichtung in Schritt 2:

$$|a + b| \le |a| + |b|,$$

was die Dreiecksungleichung darstellt.

Schritt 4: Für eine reelle Zahl a gilt: $|a| = |-a|$.

Beweis: Laut der Betragsdefinition ist:

$$|-a| = \left\{\begin{matrix} -a & -a \ge 0 \\ -(-a) & -a \le 0 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} -a & a \le 0 \\ a & a \ge 0 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} a & a \ge 0 \\ -a & a \le 0 \end{matrix}\right\} = |a|.$$

Schritt 5: Es gilt für zwei reelle Zahlen a, b die umgekehrte Dreiecksungleichung: $\big||a| - |b|\big| \le |a - b|$.

Beweis: Mit der Dreiecksungleichung aus Schritt 3 gilt für zwei reelle Zahlen a, b:

$$|a| = |a-b+b| = |(a-b)+b| \le |a-b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \le |a-b|$$
$$|b| = |a+b-a| = |a+(b-a)| \le |a| + |b-a| \Rightarrow |b| - |a| \le |b-a|$$

mit: $|b-a| = |a-b|$ gemäß Schritt 4. Es gilt damit:

$$|a| - |b| \le |a-b|,\ |b| - |a| \le |a-b|.$$

oder nach der Multiplikation der 2. Ungleichung mit -1:

$$|a| - |b| \le |a-b|,\ |a| - |b| \ge -|a-b| \Leftrightarrow -|a-b| \le |a| - |b| \le |a-b|.$$

Die letzte Ungleichungskette ist nach der Rückrichtung in Schritt 2 aber gleichbedeutend mit:

$$\big||a| - |b|\big| \le |a-b|.$$

Es gilt damit die umgekehrte Dreiecksungleichung.

Folgerungen

Die Dreiecksungleichung gilt für zwei Summanden a, b und daher – etwa beweisbar über vollständige Induktion – auch für eine endliche Summe reeller Zahlen a_1, a_2, … a_n, n als natürliche Zahl:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

In der reellen Analysis führen Summationen bekanntlich auch auf Integrale und daher gilt für eine integrierbare Funktion f: $[x_1; x_2] \to \mathbf{R}$ mit: f: x -> f(x) entsprechend:

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| \le \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|dx.$$

Wie oben gesagt, induziert der Absolutbetrag als Norm |.| mit Definitheit ($|x|=0 \Rightarrow x=0$), Homogenität ($|rx|=|r||x|$) und Subadditivität (Dreiecksungleichung: $|x+y|\le|x|+|y|$) vermöge $|a-b| = d(a,b)$ auf den reellen Zahlen eine Metrik mit positiver Definitheit ($d(a,b)\ge 0$, $d(a,b)=0 \Leftrightarrow a=b$), Symmetrie ($d(a,b) = d(b,a)$) und Dreiecksungleichung ($d(a,b) \le d(a,c) + d(c,b)$) für reelle a, b. c, r, x, y.

Literaturhinweise: dtv-Atlas Schulmathematik, v. F. REINHARDT (= dtv 3099), München ^{3}2003, S.37 (absoluter Betrag); Wikipedia. Die freie Enzyklopädie: https://de.wikipedia.org/wiki/Dreiecksungleichung (Dreiecksungleichung).