Michael Buhlmann

Mathematik > Beweisverfahren > Vollständige Induktion: Summenformel

Carl Friedrich Gauß

Der Mathematiker und Gelehrte Carl Friedrich Gauß (*1777-†1855) studierte nach Schulausbildung und Abitur am Collegium Carolinum Braunschweig (1792-1795) und an der Universität Göttingen Mathematik (1795-1798); die Promotion erfolgte 1799, die Promotionsarbeit beschäftigte sich mit den komplexen Zahlen. Einen gewissen Abschluss fand diese erste Phase von Gauß' Forschungen über Analysis und Geometrie (1790/1800) in den *Disquisitiones Arithmeticae* (1801; daneben: Methode der kleinsten Quadrate ab 1789, geometrische Konstruktion des regulären 17-Ecks 1796, Osterfestberechnung 1800/02/07). In den folgenden Jahrzehnten (1800/20) wandte sich der auch praktisch veranlagte Gauß der Astronomie und Geodäsie zu (Landvermessungen ab 1799, Planetoi-denentdeckungen 1801/07, *Theoria Motus* 1809, „Über die hypergeometrische Reihe" 1813). 1805 wurde Gauß Professor für Astronomie an der Universität Göttingen und Direktor der dortigen (zunächst noch im Bau befindlichen) Sternwarte (astronomische Hilfstafeln 1808/12, Refraktionstafeln 1822). Die Beschäftigung mit der Geodäsie und dem Erdmagnetfeld (1820/45) führte zu Erkenntnissen bei der Erdabplattung (Geoid, 1828); 1829 veröffentlichte der Gelehrte die Schriften „Die allgemeinen Grundlagen der Theorie der Gestalt von Flüssigkeiten im Gleichgewichtszustand" und „Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik" (Prinzip des kleinsten Zwangs); 1831 erschien Gauß' „Theorie der biquadratischen Reste" zu den komplexen Zahlen. Ausfluss von Gauß' Beschäftigung mit dem Elektromagnetismus war u.a. die telegrafische Göttinger Drahtverbindung von 1833. 1843 und 1846 folgten noch zwei „Untersuchungen über Gegenstände der Geodäsie". Nach seinem Tod wurde Gauß als *princeps mathematicorum* gewürdigt (1855).

Vollständige Induktion

Allgemein gilt für das Beweisverfahren der vollständigen Induktion für Aussagen über die natürlichen Zahlen $n \varepsilon \mathbf{N}$ die folgende Vorgehensweise:

1) Induktionsanfang der Gültigkeit der Aussage für ein $n=k_0\, \varepsilon \mathbf{N}$ (meist n=0 oder n=1);
2) Induktionsannahme der Gültigkeit der Aussage für n=k;
3) Induktionsbehauptung der Gültigkeit der Aussage für n=k+1;
4) Induktionsschritt von n=k auf n=k+1, d.h.: Beweis der Induktionsbehauptung unter Verwendung der Induktionsannahme;
5) Induktionsende auf Grund von Induktionsanfang und -schritt, d.h. letztlich: Gültigkeit der Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \varepsilon \mathbf{N}$.

Summenformel I

Der Legende nach soll Carl Friedrich Gauß als Schüler in jungen Jahren die Formel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ($n \varepsilon \mathbf{N}$)

bewiesen haben. Sie lautet und ist zugleich die Behauptung, die mit dem Beweismittel der vollständigen Induktionen nachgewiesen werden soll:

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2} \text{ für alle } n\varepsilon\mathbf{N},$$

abgekürzt mit dem Summenzeichen zu:

$$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2} \text{ für alle } n\varepsilon\mathbf{N}.$$

Behauptung: $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$ für alle nε**N**.

Beweis:

1) *Induktionsanfang*: n=1 mit: $\sum_{i=1}^{1} i=1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}$ als wahre Aussage.

2) *Induktionsannahme* für n=k: $\sum_{i=1}^{k} i=\frac{k(k+1)}{2}$ sei eine wahre Aussage (*).

3) *Induktionsbehauptung* für n=k+1: $\sum_{i=1}^{k+1} i=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ ist als wahr zu beweisen.

4) *Induktionsschritt* von n=k auf n=k+1: Wir bilden eine Gleichungskette, in der an wichtiger Stelle die Induktionsannahme (*) einfließt. Es ergibt sich:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i=\sum_{i=1}^{k} i+(k+1)\underset{(*)}{=}\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{k^2+k+2k+2}{2}=\frac{k^2+3k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

(auch wegen der Überlegung, die quadratische Gleichung $k^2+3k+2 = 0 \Leftrightarrow k = -1, k = -2$ zu lösen, um den Term k^2+3k+2 in ein Produkt von Linearfaktoren (k+1)(k+2) zu zerlegen). Die Induktionsbehauptung erweist sich also als wahr, wenn die Induktionsannahme richtig ist.

5) *Beweisende*: Wegen des Induktionsanfangs gilt auf Grund des Induktionsschritts die zu beweisende Aussage nicht nur für n=1, sondern auch für n=2, weiter für n=3 usw., mithin für alle nε**N**.

Summenformel II

Angeblich sollte Carl Friedrich Gauß in der Schule die ersten 100 natürlichen Zahlen zusammenaddieren. Er hat die Aufgabe recht schnell gelöst, indem er die erste und letzte Zahl, die zweite und vorletzte, die dritte und drittletzte Zahl aus der Zahlenreihe jeweils zu 101 addiert hat, also: 1 + 100 = 101, 2 + 99 = 101, 3 + 98 = 101, … 50 + 51 = 101. Es ergab sich damit 50 Mal die 101, so dass die Summe der ersten 100 natürlichen Zahlen 50·101 = $\frac{100 \cdot 101}{2}$ = 5050 ergab. Allgemein gilt z.B. für gerades nε**N** und die ersten n natürlichen Zahlen: 1 + n = n+1, 2 + n–1 = n+1, 3 + n–2 = n+1, … n/2 + n/2+1 = n+1 => $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

<u>Summenformel III</u>

Ein anderer Beweis der Summenformel ergibt sich mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems und des <u>Gauß-Algorithmus</u>. Und zwar lässt sich jede Summe von Potenzen natürlicher Zahlen $1^p + 2^p + 3^p + \ldots n^p$ ausdrücken mit Hilfe eines ganz rationalen Terms vom Typ $a_{p+1}x^{p+1} + a_p n^p + \ldots + a_1 n$ (pε**N**) (z.B. vermöge der Faulhaberschen Formeln). Für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen (nε**N**) heißt dies also:

$$\sum_{i=1}^{n} i = a_2 n^2 + a_1 n \quad (**).$$

Zur Bestimmung der Unbekannten a_1, a_2 benötigen wir zwei lineare Gleichungen, die sich (z.B.) mit n=1 und n=2 durch Einsetzen in die Beziehung (**) ergeben:

n = 1: $1 = a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 \Rightarrow 1a_2 + 1a_1 = 1$
n = 2: $1 + 2 = a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2 \Rightarrow 4a_2 + 2a_1 = 3$.

Es folgt die Berechnung der Koeffizienten a_1, a_2 gemäß:

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$+ 1a_2 + 1a_1 = 1$

$+ 4a_2 + 2a_1 = 3$

<u>Anfangstableau</u>:

1 1 | 1
4 2 | 3

<u>1. Schritt</u>: 1*(*2*) - 4*(*1*) /

1 1 | 1
0 -2 | -1

2. Schritt: 2*(*1*) + 1*(*2*) /

2 0 | 1
0 -2 | -1

Teilen: (*1*):2 / (*2*):(-2) /

1 0 | 1/2
0 1 | 1/2

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$+ 1a_2 \quad = 1/2$
$\quad + 1a_1 = 1/2$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$a_2 = 1/2$
$a_1 = 1/2$

Einsetzen der gefundenen Koeffizienten $a_1 = 1/2$, $a_2 = 1/2$ in (**) ergibt die bekannte Summenformel:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(n^2 + n) = \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{n(n+1)}{2},$$

was zu beweisen war.

Literaturhinweise: dtv-Atlas Schulmathematik, v. F. REINHARDT (= dtv 3099), München [3]2003, S.259ff (Vollständige Induktion); LELGEMANN, D., Gauß und die Messkunst, Darmstadt 2011.

Michael Buhlmann, www.michael-buhlmann.de 11.2020