Michael Buhlmann

Mathematik-Formelsammlung
> Arithmetik/Algebra
> Pascalsches Dreieck/Binomialkoeffizienten

Das Pascalsche Dreieck besitzt das folgende Aussehen:

Dreiecks-zeile:	**Pascalsches Dreieck**:																																	
0																**1**																		
1															**1**		**1**																	
2														**1**		**2**		**1**																
3													**1**		**3**		**3**		**1**															
4												**1**		**4**		**6**		**4**		**1**														
5											**1**		**5**		**10**		**10**		**5**		**1**													
6										**1**		**6**		**15**		**20**		**15**		**6**		**1**												
7									**1**		**7**		**21**		**35**		**35**		**21**		**7**		**1**											
8								**1**		**8**		**28**		**56**		**70**		**56**		**28**		**8**		**1**										
9							**1**		**9**		**36**		**84**		**126**		**126**		**84**		**36**		**9**		**1**									
10						**1**		**10**		**45**		**120**		**210**		**252**		**210**		**120**		**45**		**10**		**1**								
11					**1**		**11**		**55**		**165**		**330**		**462**		**462**		**330**		**165**		**55**		**11**		**1**							
12				**1**		**12**		**66**		**220**		**495**		**792**		**924**		**792**		**495**		**220**		**66**		**12**		**1**						
13			**1**		**13**		**78**		**286**		**715**		**1287**		**1716**		**1716**		**1287**		**715**		**286**		**78**		**13**		**1**					
14		**1**		**14**		**91**		**364**		**1001**		**2002**		**3003**		**3432**		**3003**		**2002**		**1001**		**364**		**91**		**14**		**1**				
15		**1**		**15**		**105**		**455**		**1365**		**3003**		**5005**		**6435**		**6435**		**5005**		**3003**		**1365**		**455**		**105**		**15**		**1**		

usw.

Das Pascalsche Dreieck wird von zwei Reihen aus Einsen umsäumt, die Zahlen in den Zeilen innerhalb des Dreiecks entstehen jeweils durch Addition der zwei schräg darüber liegenden Zahlen. Im so gebildeten Pascalschen Dreieck lässt sich eine ganze Reihe von Zahlenfolgen ausmachen, die Zahlenfolge der natürlichen Zahlen **N** = {1, 2, 3, …} in der 1. Spalte des Dreiecks, die der Dreieckszahlen 1, 3, 6, 10, 15, … in der 2. Spalte, die der Tetraederzahlen 1, 4, 10, 20, 35, … in der 3. Spalte, die Folge der Fibonaccizahlen 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, … durch Addition der Zahlen in den Dreiecksdiagonalen.

Mit n! (n Fakultät) als:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n\,,\ 0! = 1$$

und dem Binomialkoeffizienten („n über k“) als:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

für natürliche Zahlen (einschließlich 0) k, n mit k≤n ergibt sich die Identität der Zahlen im Pascalschen Dreieck mit den Binomialkoeffzienten:

					$\binom{0}{0}=1$					
				$\binom{1}{0}=1$		$\binom{1}{1}=1$				
			$\binom{2}{0}=1$		$\binom{2}{1}=2$		$\binom{2}{2}=1$			
		$\binom{3}{0}=1$		$\binom{3}{1}=3$		$\binom{3}{2}=3$		$\binom{3}{3}=1$		
	$\binom{4}{0}=1$		$\binom{4}{1}=4$		$\binom{4}{2}=6$		$\binom{4}{3}=4$		$\binom{4}{4}=1$	
$\binom{5}{0}=1$		$\binom{5}{1}=5$		$\binom{5}{2}=10$		$\binom{5}{3}=10$		$\binom{5}{4}=4$		$\binom{5}{5}=1$

usw.

unter Beachtung der Zuordnung von Zeilen und (schräg gestellten) Spalten im Dreieck (Zeilen: n = 0, 1, …; Spalten: k = 0, 1, … n) gemäß der nachstehenden Tabelle:

	Pascalsches Dreieck, Binomialkoeffizienten:												
Dreieckszeile:	**Dreiecksspalte**:						0						
0							**1**		1				
1						**1**		**1**		2			
2					**1**		**2**		**1**		3		
3				**1**		**3**		**3**		**1**		4	
4			**1**		**4**		**6**		**4**		**1**		5
5		**1**		**5**		**10**		**10**		**5**		**1**	

usw.

Es gelten folgende Rechenregeln für die Binomialkoeffizienten bzw. die Zahlen im Pascalschen Dreieck:

Binomialkoeffizienten (Rechenregeln)
$\binom{n}{0}=1$, $\binom{n}{n}=1$ (Zahlen an den Rändern des Pascalschen Dreiecks als 1)
$\binom{n}{1}=n$, $\binom{n}{n-1}=n$ (Zahlen in der 1. und (n-1). Spalte des Pascalschen Dreiecks als Zahlenreihe der natürlichen Zahlen)
$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ (Symmetrie des Pascalschen Dreiecks)
$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$ (Zahl im Pascalschen Dreieck als Summe der darüber stehenden Zahlen)

www.michael-buhlmann.de / 07.2018