Michael Buhlmann

Mathematik-Formelsammlung
> Statistik
> Signifikanztests (Binomialverteilung)
> Zweiseitiger Signifikanztest

Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment mit zwei Ausgängen (T = Treffer, N = Nichttreffer), der Grundwahrscheinlichkeit p als Trefferwahrscheinlichkeit, der Anzahl n der Experimentwiederholung „mit Zurücklegen“. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer (T) bei n-maliger Wiederholung des Experiments an. Es gelten auf Grund der Pfadregeln für Wahrscheinlichkeitsbäume (Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades, Addition der (multiplizierten) Wahrscheinlichkeiten verschiedener Pfade) die Trefferwahrscheinlichkeiten der Bernoulli-Formel:

$$p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$
$$p(X\le k)=p(X=0)+p(X=1)+\ldots+p(X=k)$$

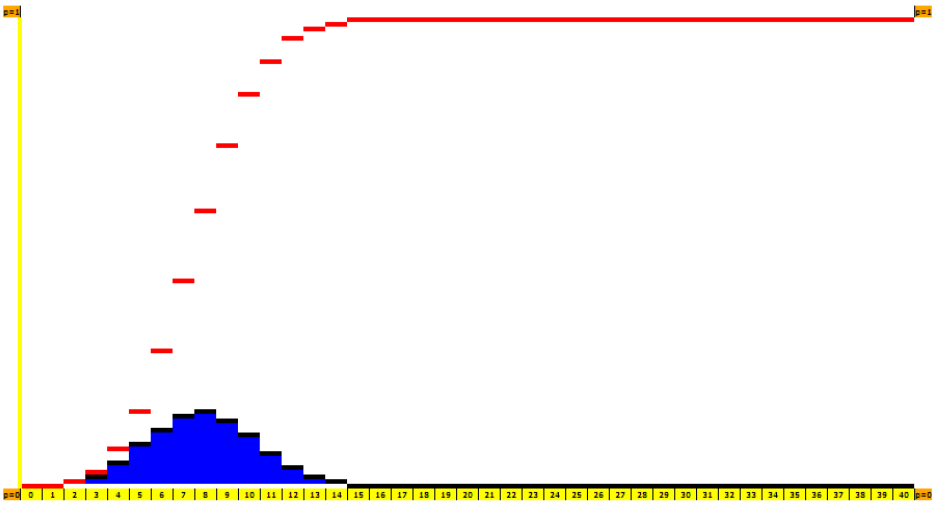
mit den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ (als Anzahl der Pfade mit gleicher Wahrscheinlichkeit $p^k(1-p)^{n-k}$). Es gilt weiter hinsichtlich des Erwartungswerts E(X) und der Standardabweichung σ(X) beim Bernoulli-Experiment:

$$E(X) = \mu = np,\ \sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}\ .$$

Aus dem Bernoulli-Experiment ergibt sich die Binomialverteilung B(n,p) für die Zufallsvariable X der Trefferanzahl mit:

$$B(n,p,k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

und:



p(X=k) = B(n,p,k), p(X≤k)

Mit Hilfe der Binomialverteilung können sog. Signifikanztests durchgeführt werden, z.B. um bei unbekannter Grundwahrscheinlichkeit p eines Bernoulli-Experiments diese Wahrscheinlichkeit anhand von Stichproben zu testen. Für zweiseitige Signifikanztests ergibt sich damit:

Zweiseitige Signifikanztests (Binomialverteilung)

Zweiseitiger Signifikanztest:

H_0: $p=p_0$ (Nullhypothese)
gegen H_1: $p \neq p_0$ (Gegenhypothese)

bei Stichprobenumfang n und Signifikanzniveau (maximale Irrtumswahrscheinlichkeit) α -> Annahmebereich [a; b] der Nullhypothese bei kleinstem a und b mit

$$p(X \leq a) > \alpha/2,\ p(X \leq b) > 1-\alpha/2$$

-> Durchführung der Stichprobe und Bestimmung der Trefferanzahl -> Annahme bzw. Ablehnung der Nullhypothese, wenn Trefferanzahl im Annahmebereich bzw. sonst -> Irrtumswahrscheinlichkeit als:

$$p(X<a) + p(X>b) = 1-p(a \leq X \leq b) \leq \alpha.$$

Beispiel:

Beispiel: Wahrscheinlichkeitstafel: Zweiseitiger Signifikanztest mit B(20,0.25)-verteilter Zufallsvariable: Nullhypothese: H_0: p = 0.25; Gegenhypothese H_1: p ≠ 0.25; Signifikanzniveau α = 0.05 = 5%

n = 20	**B(20,0.25)**	**p = 0.25**
k =	**p(X=k)** =	**p(x≤k)** =
0	0.003171	0.003171
1	0.021141	0.024313
2	0.066948	0.09126
3	0.133896	0.225156
4	0.189685	0.414842
5	0.202331	0.617173
6	0.168609	0.785782
7	0.112406	0.898188
8	0.060887	0.959075
9	0.027061	0.986136
10	0.009922	0.996058
11	0.003007	0.999065
12	0.000752	0.999816
13	0.000154	0.99997
14	0.000026	0.999996
15	0.000003	1
16	0	1
17	0	1
18	0	1
19	0	1
20	0	1

Annahmebereich [2; 9] der Nullhypothese H_0: p = 0.25 zum Signifikanzniveau α = 0.05 = 5% bei 20-maliger Versuchswiederholung des Bernoulli-Experiments und Erwartungswert μ = 5.