Michael Buhlmann

Mathematik-Formelsammlung
> Stochastik/Wahrscheinlichkeitsrechnung
> Bernoulli-Experiment

Stochastik oder Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die Beschäftigung mit Wahrscheinlichkeiten, also mit mathematischen Größen p (0≤p≤1, p reell), die im Rahmen von Zufallsexperimenten als Maß für die Sicherheit bzw. Unsicherheit eines Ergebnisses bzw. Ereignisses in Erscheinung treten. Zufallsexperimente (Zufallsversuche, Zufallsvorgänge) sind mathematisch modellierte Prozesse, die auf der (endlichen) Wiederholung (Mehrstufigkeit) einer gleichen festgelegten Versuchssituation (Merkmale, Versuchsausgänge) beruhen, wobei die (abzählbar-endlichen) möglichen Ergebnisse einer solchen Versuchsdurchführung ebenso wie die Ergebniswahrscheinlichkeiten (als relative Häufigkeiten [Gesetz der großen Zahlen]) bekannt sind. Zufallsexperimente lassen sich durch sog. Wahrscheinlichkeitsbäume (aus Knoten, Verzweigungen [Ausgänge, Merkmalsausprägungen], Kanten [Zweige] und Pfaden [Äste]) darstellen, die Ergebnisse und Wahrscheinlichkeiten anzeigen. Zufallsexperimente, die auf Ergebnisse mit immer derselben Wahrscheinlichkeit hinführen, heißen Laplace-Experimente. Ergebnisse sind Elementarereignisse, Ereignisse sind Zusammenfassungen von Ergebnissen (Mengenlehre der Ereignisse), die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses errechnet sich gemäß den Pfadregeln (Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten innerhalb eines Pfades, Addition von Wahrscheinlichkeiten verschiedener Pfade); die Wahrscheinlichkeit aller Ergebnisse eines Zufallsexperiments stellt eine Wahrscheinlichkeitsverteilung dar; die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse ergibt das sichere Ereignis. Aus diesen Sachverhalten folgt die Axiomatik der Wahrscheinlichkeiten mit den daraus abgeleiteten Formeln des Additionssatzes und des Gegenereignisses (De Morgansche Regeln). Eine Zufallsvariable ist eine Funktion, die Ereignissen des Zufallsexperiments eine reelle Zahl zuordnet. Bzgl. der Zufallsvariablen lassen sich Aussagen zu Erwartungswert und Standardabweichung treffen.

Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment mit zwei Ausgängen (T = Treffer, N = Nichttreffer), der Grundwahrscheinlichkeit p als Trefferwahrscheinlichkeit, der Anzahl n der Experimentwiederholung „mit Zurücklegen". Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer bei n-maliger Wiederholung des Experiments an. Es gelten auf Grund der Pfadregeln für Wahrscheinlichkeitsbäume (Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades, Addition der [multiplizierten] Wahrscheinlichkeiten verschiedener Pfade) die Trefferwahrscheinlichkeiten der Bernoulli-Formel:

Bernoulli-Formel
$p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

mit den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ (als Anzahl der Pfade mit gleicher Wahrscheinlichkeit $p^k(1–p)^{n-k}$) und weiter:

Beispiel:

Wahrscheinlichkeitsbaum:

			0.4 **T**	>	p(**TTTT**) = 0.0256	**1**
		0.4 **T**				
			0.6 **N**	>	p(**TTTN**) = 0.0384	**2**
	0.4 **T**					
			0.4 **T**	>	p(**TTNT**) = 0.0384	**3**
		0.6 **N**				
			0.6 **N**	>	p(**TTNN**) = 0.0576	**4**
0.4 **T**						
			0.4 **T**	>	p(**TNTT**) = 0.0384	**5**
		0.4 **T**				
			0.6 **N**	>	p(**TNTN**) = 0.0576	**6**
	0.6 **N**					
			0.4 **T**	>	p(**TNNT**) = 0.0576	**7**
		0.6 **N**				
			0.6 **N**	>	p(**TNNN**) = 0.0864	**8**
			0.4 **T**	>	p(**NTTT**) = 0.0384	**9**
		0.4 **T**				
			0.6 **N**	>	p(**NTTN**) = 0.0576	**10**
	0.4 **T**					
			0.4 **T**	>	p(**NTNT**) = 0.0576	**11**
		0.6 **N**				
			0.6 **N**	>	p(**NTNN**) = 0.0864	**12**
0.6 **N**						
			0.4 **T**	>	p(**NNTT**) = 0.0576	**13**
		0.4 **T**				
			0.6 **N**	>	p(**NNTN**) = 0.0864	**14**
	0.6 **N**					
			0.4 **T**	>	p(**NNNT**) = 0.0864	**15**
		0.6 **N**				
			0.6 **N**	>	p(**NNNN**) = 0.1296	**16**

Trefferwahrscheinlichkeiten:

Treffer-anzahl k =	**Pfad-wahr schein lichkeit**	**Pfad-anzahl**	**Gesamt-wahrschein-lichkeit** p(X=k) =
4	0.0256	1	0.0256
3	0.0384	4	0.1536
2	0.0576	6	0.3456
1	0.0864	4	0.3456
0	0.1296	1	0.1296
	Summe	16	1
		Erwar-tungs-wert	1.6
		Stan-dard-abwei-chung	0.9798
		Binomialverteilung	B(4,0.4)

Bernoulli-Wahrscheinlichkeiten

$$p(X=0) = (1-p)^n$$
$$p(X=n) = p^n$$
$$p(X\le k) = p(X=0) + p(X=1) + \ldots + p(X=k) = 1 - p(X>k)$$
$$p(X<k) = p(X\le k-1) = 1 - p(X\ge k)$$
$$p(X\ge k) = 1 - p(X\le k-1)$$
$$p(X>k) = p(X\ge k+1) = 1 - p(X\le k)$$
$$p(k_1\le X\le k_2) = p(X=k_1) + \ldots + p(X=k_2) = p(X\le k_2)-p(X\le k_1-1)$$
$$p(k_1<X\le k_2) = p(X=k_1+1) + \ldots + p(X=k_2) = p(X\le k_2)-p(X\le k_1)$$
$$p(k_1\le X<k_2) = p(X=k_1) + \ldots + p(X=k_2-1) = p(X\le k_2-1)-p(X\le k_1-1)$$
$$p(k_1<X<k_2) = p(X=k_1+1) + \ldots + p(X=k_2-1) = p(X\le k_2-1)-p(X\le k_1)$$

Die Zufallsvariable X, die der Bernoulli-Formel genügt, heißt binomialverteilt mit den Parametern n und p (B(n,p): Experimentwiederholung n, Trefferwahrscheinlichkeit p). Es gilt weiter hinsichtlich des Erwartungswerts E(X) der binomialverteilten Zufallsvariablen X beim Bernoulli-Experiment:

$$E(X) = \mu = np.$$

Hinsichtlich der Standardabweichung σ der binomialverteilten Zufallsvariablen X beim Bernoulli-Experiment folgt:

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)}\,.$$

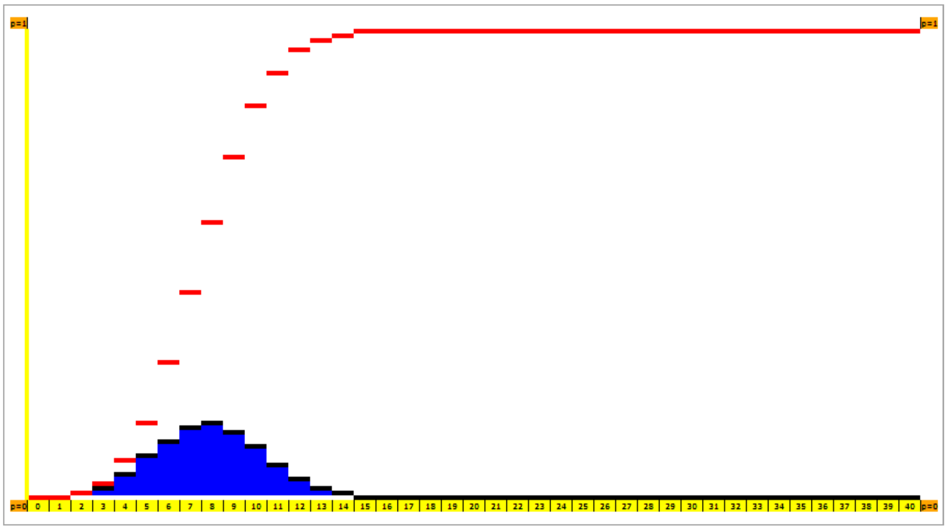
Aus dem Bernoulli-Experiment ergibt sich die Binomialverteilung B(n,p) für die Zufallsvariable X der Trefferanzahl mit:

$$B(n,p,k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\,.$$

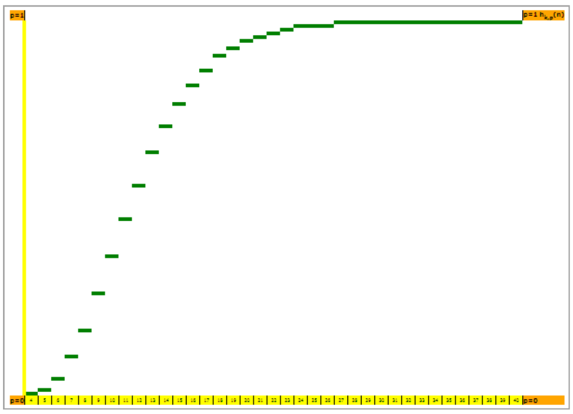
Der Ausdruck B(n,p,k) kann dann wie folgt ausgewertet werden:

Binomialverteilung

a) Trefferwahrscheinlichkeiten bei festem n und p: Funktionen f(k) = p(X=k), g(k) = p(X≤k):



b) Trefferwahrscheinlichkeiten bei festem k und p: Funktionen f(n) = p(X>k) = 1–p(X≤k) u.ä.:



c) Trefferwahrscheinlichkeiten bei festem n und k: Funktionen f(p) = p(X≤k) u.ä.: