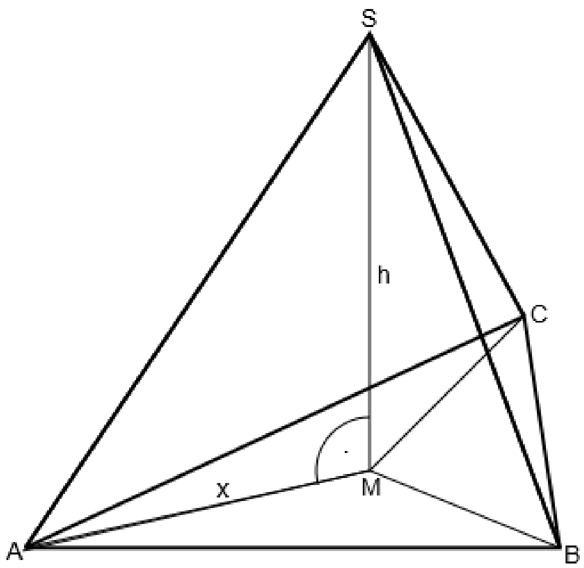
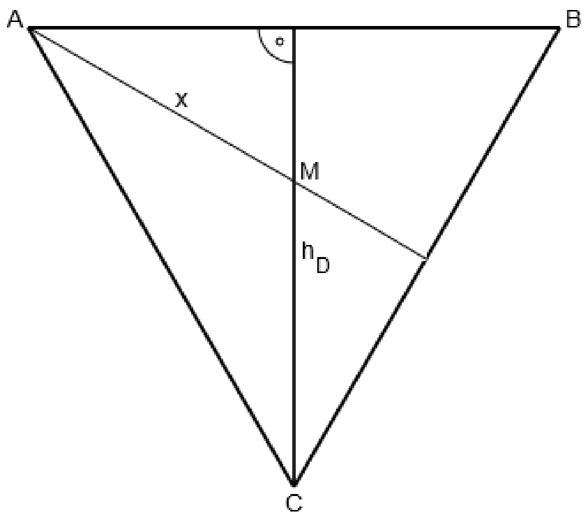
Michael Buhlmann

Mathematik > Geometrie > Tetraeder

Der Tetraeder gehört zu den sog. platonischen Körpern (griechischer Philosoph Platon, *428/27-†348/47 v.Chr.) und ist eine regelmäßige Dreieckspyramide mit derselben Grund- und Seitenkantenlänge. Grund- und Mantelflächen sind also kongruent; die Pyramide besitzt damit vier gleichseitige Oberflächendreiecke.
Es sei im Folgenden a die Kantenlänge des Tetraeders, h dessen Höhe. Die Höhe errechnet sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras und unter Verwendung der Beziehungen in gleichseitigen Dreiecken wie folgt:





Im (nebenstehend unten abgebildeten) gleichseitigen Grundflächendreieck ΔABC des Tetraeders ABCS berechnet sich die Dreieckshöhe h_D gemäß:

$$h_D = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

(was letztlich auch aus dem Satz des Pythagoras folgt). Weiter ist bekannt, dass die Mitte M des gleichseitigen Dreiecks ΔABC der Höhenschnittpunkt ist; M teilt dabei jede Dreieckshöhe, auch die von der Ecke A ausgehende, im Verhältnis 1/3 zu 2/3; die Länge x ist damit:

$$x = \frac{2}{3}h_D = \frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3}\,.$$

Die Länge x findet nun im (nebenstehend oben abgebildeten) Tetraeder ABCS Verwendung. Das Dreieck ΔAMS ist ein rechtwinkliges mit den Katheten x und h und der Hypotenuse a (als Seitenkante des Tetraeders). Es gilt damit der Satz des Pythagoras:

$$x^2 + h^2 = a^2$$

und umgestellt nach h:

$$h^2 = a^2 - x^2\,.$$

Mit $x = \frac{a}{3}\sqrt{3}$ folgt somit:

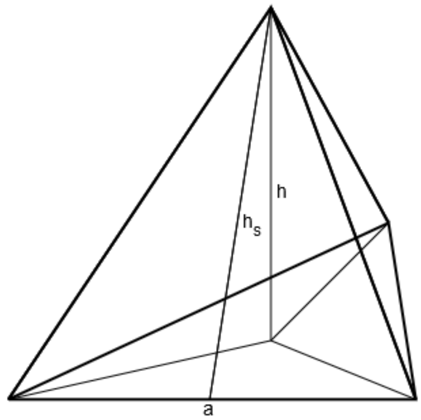
$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{9}\cdot 3 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2}{3}a^2\,.$$

Wurzelziehen ergibt die gesuchte Tetraederhöhe:

$$h = \sqrt{\frac{2}{3}a^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}a = \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{a}{3}\sqrt{6}\,.$$

Mit der Kantenlänge a, Höhe $h = \frac{a}{3}\sqrt{6}$ und Seitenhöhe h_s gelten die folgenden Beziehungen im Tetraeder, die hier zu einer Formelsammlung zusammengefasst werden. Dabei ist aus den gleichseitigen Dreiecken der Körperoberfläche ableitbar: $h_s = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, $G = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, aus den Formeln für Pyramiden: $O = 4G = G + M = a^2\sqrt{3}$, $V = \frac{G\cdot h}{3} = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$ usw.

Formelsammlung



Grundfläche	$G=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$	$a=\sqrt{\frac{4G}{\sqrt{3}}}$	$h_D=\frac{a}{2}\sqrt{3}$
Tetraederumfang	u = 3a	$a=\frac{u}{3}$	
Seitenhöhe	$h_s=h_D$	$h_s=\frac{a}{2}\sqrt{3}$	$a=\frac{2h_s}{\sqrt{3}}$
Pyramidenhöhe	$h=\frac{a}{3}\sqrt{6}$	$a=\frac{3h}{\sqrt{6}}$	
Mantelfläche	$M=\frac{3ah_s}{2}$	$h_s=\frac{2M}{3a}$	$a=\frac{2M}{3h_s}$
	$M=\frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$		$a=\sqrt{\frac{4M}{3\sqrt{3}}}$
Oberfläche	$O=4G=G+M=a^2\sqrt{3}$	$G=O-M$	$M=O-G$
	$O=a^2\sqrt{3}$		$a=\sqrt{\frac{O}{\sqrt{3}}}$
Volumen	$V=\frac{G\cdot h}{3}=\frac{a^3}{12}\sqrt{2}$	$G=\frac{3V}{h}$	$h=\frac{3V}{G}$
	$V=\frac{a^3}{12}\sqrt{2}$		$a=\sqrt[3]{\frac{12V}{\sqrt{2}}}$
Winkel zwischen Seitenkante a und Grundkante a	$\alpha=60°$		
Winkel zwischen Seitenhöhe h_s und Grundfläche G		$\cos\beta=\frac{1}{3}$	$\beta=70{,}32°$
Winkel zwischen Seitenkante a und Grundfläche G		$\gamma=54{,}44°$	$\tan\gamma=\sqrt{2}$