Michael Buhlmann

Mathematik > Lineare Gleichungssysteme

Carl Friedrich Gauß

Der Mathematiker und Gelehrte Carl Friedrich Gauß (*1777-†1855) studierte nach Schulausbildung und Abitur am Collegium Carolinum Braunschweig (1792-1795) und an der Universität Göttingen Mathematik (1795-1798); die Promotion erfolgte 1799, die Promotionsarbeit beschäftigte sich mit den komplexen Zahlen. Einen gewissen Abschluss fand diese erste Phase von Gauß' Forschungen über Analysis und Geometrie (1790/1800) in den *Disquisitiones Arithmeticae* (1801; daneben: Methode der kleinsten Quadrate ab 1789, geometrische Konstruktion des regulären 17-Ecks 1796, Osterfestberechnung 1800/02/07). In den folgenden Jahrzehnten (1800/20) wandte sich der auch praktisch veranlagte Gauß der Astronomie und Geodäsie zu (Landvermessungen ab 1799, Planetoidenentdeckungen 1801/07, *Theoria Motus* 1809, „Über die hypergeometrische Reihe“ 1813). 1805 wurde Gauß Professor für Astronomie an der Universität Göttingen und Direktor der dortigen (zunächst noch im Bau befindlichen) Sternwarte (astronomische Hilfstafeln 1808/12, Refraktionstafeln 1822). Die Beschäftigung mit der Geodäsie und dem Erdmagnetfeld (1820/45) führte zu Erkenntnissen bei der Erdabplattung (Geoid, 1828); 1829 veröffentlichte der Gelehrte die Schriften „Die allgemeinen Grundlagen der Theorie der Gestalt von Flüssigkeiten im Gleichgewichtszustand“ und „Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik“ (Prinzip des kleinsten Zwangs); 1831 erschien Gauß' „Theorie der biquadratischen Reste“ zu den komplexen Zahlen. Ausfluss von Gauß' Beschäftigung mit dem Elektromagnetismus war u.a. die telegrafische Göttinger Drahtverbindung von 1833. 1843 und 1846 folgten noch zwei „Untersuchungen über Gegenstände der Geodäsie“. Nach seinem Tod wurde Gauß als *princeps mathematicorum* gewürdigt (1855).

Lineare Gleichungssysteme

In den 1820er-Jahren entwickelte Gauß seine Theorie der linearen Gleichungssysteme, den Gauß-Algorithmus, den er erfolgreich zur Berechnung der Umlaufbahnen der damals neu entdeckten Asteroiden/Planetoiden anwandte.

Ein (allgemeines) lineares Gleichungssystem bestehe aus m Gleichungen (durchnummeriert von 1 bis m) und n Unbekannten und habe die Form:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \quad (1)\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \quad (2)\\
&\dots\\
a_{m1}x + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \quad (m)
\end{aligned}
$$

mit den reellen Variablen $x_1, \dots x_n$, den reellen Koeffizienten $a_{11}, \dots a_{mn}$ und reellen Ergebnissen (rechten Seiten) $b_1, \dots b_m$. Sind alle Zahlen $b_1, \dots b_m = 0$, so heißt das lineare Gleichungssystem homogen, ansonsten inhomogen. Ein Gleichungssystem mit mehr Variablen als Gleichungen ($n > m$) heißt unterbestimmt, eins mit mehr Gleichungen als Variablen ($n < m$) überbestimmt. In abgekürzter tabellarischer Darstellung (Matrixdarstellung) lautet das lineare Gleichungssystem in der Form der durch die rechte Seite erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1\\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2\\
\dots & & & & \dots\\
a_{mn} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m
\end{array}\right)
$$

Im Falle einer beliebigen Anzahl von m Gleichungen und n Unbekannten gilt hinsichtlich des Gauß-Algorithmus zur Lösung des Gleichungssystems die folgende Vorgehensweise:

Gauß-Algorithmus für lineare Gleichungssysteme
1) Das lineare Gleichungssystem aus Gleichungen und Unbekannten wird in Matrixdarstellung umgeschrieben; einer Gleichung entspricht eine Zeile, einer Unbekannten einer Spalte in der Matrix, die rechte (Zahlen-) Seite des Gleichungssystems bildet die letzte Spalte der Matrix; die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten kann auch verschieden sein. 2) Beim Gauß-Algorithmus werden, beginnend vom Anfangstableau, Nullen unter der Hauptdiagonalen wie folgt erzeugt: 1. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 1. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 2; ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 2, so werden alle Matrixelemente in Zeile 2 mit a multipliziert, alle Matrixelemente in Zeile 1 mit b multipliziert und Produkt minus Produkt als neue Matrixelemente der Zeile 2 gebildet (Vorgehensweise (*)). Ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 3, so gilt die entsprechende Vorgehensweise (*) usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 2. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 2. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 3; ist a das zweite Element in Zeile 2 und b das zweite Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*), und dies weiter für Zeile 4 usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 3. Schritt usw., bis die letzte Matrixspalte erreicht ist. Es entsteht dadurch das Endtableau des Algorithmus, das auf die Art der Lösungen und die Lösungen des linearen Gleichungssystems hinweist gemäß den folgenden Fällen: Fall I – eindeutige Lösung: 3/I) Ist im Endtableau des Gauß-Algorithmus die Diagonalgestalt gegeben, so gilt für die Variable z der letzten Spalte mit dem dazugehörenden Matrixelement $a\neq0$ und dem Element b der rechten Seite: $az = b \Leftrightarrow z = b/a$. / Für die Variable y der vorletzten Spalte mit dem dazugehörenden Matrixelement $c\neq0$, dem Matrixelement d und dem Element e der rechten Seite gilt: $cy+dz = e \Leftrightarrow cy = e - db/a \Leftrightarrow y = e/c - db/(ac)$ / usw., bis die Variable der ersten Matrixspalte errechnet ist. 4/I) Die Lösungsmenge besteht in diesem Fall – wegen der Eindeutigkeit der Lösung – aus einem Zahlentupel, also: **L** = {(l|m|…|t)} mit reellen Zahlen l, m, … t. Fall II – keine Lösung: 3/II) Das Endtableau enthält im Bereich der linken Seite eine Nullzeile, während die damit korrespondierende rechte Seite ein Element $f\neq0$ ist. 4/II) Wir erhalten also die Gleichung: $0 = f \neq 0$ und damit einen Widerspruch. Das lineare Gleichungssystem besitzt keine Lösung: **L** = { }. Fall III – mehrdeutige Lösung: 3/III) Das Endtableau enthält im Bereich der linken Seite eine Nullzeile, während die dazugehörige rechte Seite ebenfalls ein Element = 0 enthält. 4/III) Wir erhalten eine mehrdeutige Lösung, indem wir die Variable z, dessen Diagonalelement =0 ist, gleich einem reellen Parameter r setzen. Die Lösungsmenge ist dann vom Typ **L** = {(l(r)|m(r)|…|t(r))| rε**R**} mit linearen, von r abhängigen Funktionen $l(r) = l_1r + l_2$, $m(r) = m_1r + m_2$, …, $t(r) = t_1r + t_2$. Bei mehreren Nullzeilen des Endtableaus sind auch entsprechend viele Variablen gleich Parametern r, s, … zu setzen, die Komponenten der Lösungsmenge sind Linearkombinationen der Parameter r, s, …

Eine entsprechende Vorgehensweise ergibt sich, wenn man das Gleichungssystem statt in eine (gestaffelte) Dreiecksgestalt in eine (modifizierte) Diagonalgestalt bringt.

Beispiele:

a) (Lösung nach Dreiecksgestalt, eindeutige Lösung:)

Lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
-\ 2x_1 - 7x_2 &= 6 \\
+\ 10x_1 + 1x_3 &= 0 \\
+\ 4x_2 - 1x_3 &= 1
\end{aligned}
$$

Anfangstableau:

-2 -7 0 | 6
10 0 1 | 0
 0 4 -1 | 1

<u>1. Schritt</u>: 1*(*2*) + 5*(*1*)

-2 -7 0 | 6

0 -35 1 | 30

0 4 -1 | 1

<u>2. Schritt</u>: 35*(*3*) + 4*(*2*)

-2 -7 0 | 6

0 -35 1 | 30

0 0 -31 | 155

<u>Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$$
\begin{aligned}
-2x_1 - 7x_2 \quad &= 6 \\
-35x_2 + 1x_3 &= 30 \\
-31x_3 &= 155
\end{aligned}
$$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

$x_3 = -5$
$x_2 = -1$
$x_1 = 0.5$

b) (Lösung nach Diagonalgestalt, eindeutige Lösung:)

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$+ 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 3$

$+ 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 5$

$+ 3x_1 + 5x_2 - 1x_3 = 7$

<u>Anfangstableau</u>:

5 -4 2 | 3

2 2 1 | 5

3 5 -1 | 7

<u>1. Schritt</u>: 5*(*2*) - 2*(*1*) / 5*(*3*) - 3*(*1*) /

5 -4 2 | 3

0 18 1 | 19

0 37 -11 | 26

<u>2. Schritt</u>: 9*(*1*) + 2*(*2*) / 18*(*3*) - 37*(*2*) /

45 0 20 | 65

0 18 1 | 19

0 0 -235 | -235

<u>3. Schritt</u>: 47*(*1*) + 4*(*3*) / 235*(*2*) + 1*(*3*) /

2115 0 0 | 2115

0 4230 0 | 4230

0 0 -235 | -235

<u>Teilen</u>: (*1*):2115 / (*2*):4230 / (*3*):(-235) /

1 0 0 | 1

0 1 0 | 1

0 0 1 | 1

<u>Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$$
\begin{aligned}
+1x_1 \quad &= 1 \\
+1x_2 \quad &= 1 \\
+1x_3 &= 1
\end{aligned}
$$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

$x_1 = 1$
$x_2 = 1$
$x_3 = 1$

c) (Lösung nach Diagonalgestalt, unendlich viele Lösungen:)

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$+ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 8$

$+ 3x_1 - 1x_2 - 2x_3 = -10$

<u>Anfangstableau</u>:

x_1	x_2	x_3	*R.S.*
2	3	-5	8
3	-1	-2	-10

<u>1. Schritt</u>: 2*(*2*) - 3*(*1*) /

2	3	-5	8
0	-11	11	-44

<u>2. Schritt</u>: 11*(*1*) + 3*(*2*) /

22	0	-22	-44
0	-11	11	-44

<u>Teilen</u>: (*1*):22 / (*2*):(-11) /

1	0	-1	-2
0	1	-1	4

<u>Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$+ 1x_1 \qquad - 1x_3 = -2$

$\qquad + 1x_2 - 1x_3 = 4$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

$x_3 = t$
$x_1 = -2 + 1t$
$x_2 = 4 + 1t$
-> unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems; Parameter ist die reelle Zahl t

d) (Lösung nach Diagonalgestalt, keine Lösung:)

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$+ 2x_1 + 1x_2 - 1x_3 = 2$

$+ 1x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3$

$+ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 4$

<u>Anfangstableau</u>:

x_1	x_2	x_3	*R.S.*
2	1	-1	2
1	3	-2	3
3	4	-3	4

<u>1. Schritt</u>: 2*(*2*) - 1*(*1*) / 2*(*3*) - 3*(*1*) /

2	1	-1	2
0	5	-3	4
0	5	-3	2

<u>2. Schritt</u>: 5*(*1*) - 1*(*2*) / 1*(*3*) - 1*(*2*) /

10	0	-2	6
0	5	-3	4
0	0	0	-2

<u>3. Schritt</u>: (keine Umformung) /

10	0	-2	6
0	5	-3	4
0	0	0	-2

Teilen: (*1*):10 / (*2*):5 /

1 0 -0.2 | 0.6

0 1 -0.6 | 0.8

0 0   0 | -2

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$+ 1x_1 \quad - 0.2x_3 = 0.6$

$+ 1x_2 - 0.6x_3 = 0.8$

$0 = -2$

-> keine Lösung des linearen Gleichungssystems

Literatur:

dtv-Atlas Schulmathematik, v. FRITZ REINHARDT (= dtv 3099), München [3]2003, S.70f
LELGEMANN, DIETER, Gauß und die Messkunst, Darmstadt 2011

Michael Buhlmann, 08.2014