Michael Buhlmann

Mathematisch-wirtschaftliche Anwendungen für Schüler und Abiturienten

Daten- und Aufgabenblätter zur Mathematik

Version 1

Essen 2017

Vorwort

Diese Sammlung aus Daten- und Aufgabenblättern geht aus einer jahrelangen Tätigkeit als Nachhilfelehrer für Oberstufenschüler und Erwachsene hervor. Die einzelnen Daten- und Aufgabenblätter wurden in einer sinnvollen Reihenfolge zusammengestellt. Zudem finden sich Rechenprogramme zu den behandelten Themen auf meiner Homepage

http://www.michael-buhlmann.de/Mathematik/index.htm

Die mathematisch-wirtschaftlichen Anwendungen gliedern sich in: Kosten- und Erlösrechnung, Produktionsmatrizen, Übergangsmatrizen, Leontiefmodell, lineare Optimierung.

Essen im März 2017, *Michael Buhlmann*

Impressum:

© 2017 Wissenschaftlicher Selbstverlag Michael Buhlmann
Sedanstr. 35, D-45138 Essen, Deutschland
www.michael-buhlmann.de, kontakt-hp@michael-buhlmann.de

Inhalt

Datenblatt: Reelle Zahlen, reelle Funktionen
Datenblatt: Gleichungen
Datenblatt: Mittlere, momentane Änderungsrate, Ableitung
Datenblatt: Tangenten
Datenblatt: Funktionsuntersuchung (ganz rationale Funktionen, Polynome)
Datenblatt: Bestimmungsaufgabe (ganz rationale Funktionen, Polynome)
Datenblatt: Erlös-, Kostenfunktionen
Aufgabenblatt: Erlös-, Kostenfunktionen
Datenblatt: Lineare Gleichungssysteme I – Gleichsetzen, Einsetzen, Addition
Datenblatt: Lineare Gleichungssysteme II – Gauß-Algorithmus
Aufgabenblatt: Lineare Gleichungssysteme
Datenblatt: Matrizen
Aufgabenblatt: Matrizen
Datenblatt: Produktionsmatrizen
Aufgabenblatt: Produktionsmatrizen
Datenblatt: Übergangsmatrizen
Aufgabenblatt: Übergangsmatrizen
Datenblatt: Leontiefmodell
Aufgabenblatt: Leontiefmodell
Datenblatt: Lineare Optimierung I – Grafische Lösung, Eckpunktverfahren
Datenblatt: Lineare Optimierung II – Simplexverfahren
Aufgabenblatt: Lineare Optimierung

Datenblatt: Reelle Zahlen, reelle Funktionen

Die reellen Zahlen **R** ist Zahlenmenge aller abrechenden, periodischen und nichtperiodischen Dezimalzahlen. Auf den reellen Zahlen sind die Verknüpfungen + und * für Addition (Subtraktion) und Multiplikation (Division) definiert:

$$a+b,\ a-b,\ a*b,\ a/b\ (b\neq 0)$$

Die Verknüpfungen machen aus den reellen Zahlen einen (algebraischen) Körper mit positiven, negativen Zahlen sowie Zahl und Kehrzahl. Zudem wird mit ≤ eine Ordnungsrelation auf den reellen Zahlen definiert, die Kleiner-gleich-Relation macht Zahlen vergleichbar. Mit -∞ und ∞ („unendlich“) sind Elemente gegeben, so dass:

$$-\infty < r < \infty$$

für jede reelle Zahl r gilt. Auf den reellen Zahlen lassen sich auf Grund der Ordnung (halb-) offene, geschlossene Intervalle (Teilmengen) definieren, und zwar:

$-\infty < r \leq a$: $(-\infty; a]$
$-\infty < r < a$: $(-\infty; a)$
$a \leq r \leq b$: $[a; b]$
$a < r \leq b$: $(a; b]$
$a \leq r < b$: $[a; b)$
$a < r < b$: $(a; b)$
$b \leq r < \infty$: $[b; \infty)$
$b < r < \infty$: $(b; \infty)$

mit reellen Zahlen a, b, a<b.

Terme sind Rezepte, sind mathematische Formeln, in die man gegebenenfalls Werte, Zahlen einsetzt. Mit Termen kann man daher auf dieselbe Weise rechnen wie mit Zahlen, d.h. es gelten für reelle Zahlen die Rechengesetze und Termumformungen (z.B. Punktrechnung vor Strichrechung, Klammerrechnung [Klammern auflösen, Ausklammern]).

Auf den reellen Zahlen lassen sich Funktionen definieren. Analysis ist die Mathematik der Funktionen. Funktionen sind Abbildungen f: D_f -> **R** von reellen Zahlen in reelle Zahlen, d.h.: sie ordnen vermöge einer Zuordnung x -> f(x) = y (Funktionsterm) jedem reellen x des (maximalen) Definitionsbereichs D_f genau ein reelles y des Wertebereichs W_f zu. Funktionen können vervielfacht, addiert, subtrahiert, multipliziert, dividiert, potenziert, verknüpft werden, d.h. es gilt: r·f(x), f(x)+g(x), f(x)-g(x), f(x)·g(x) usw. sind reguläre Funktionsterme. Wir unterscheiden:

$y = mx + c$	Gerade
$y = ax^2 + bx + c$	Parabel (2. Grades)
$y = ax^3 + bx^2 + cx+d$	Parabel (3. Grades)
$y = ax^4 + bx^3 + cx^2+dx+e$	Parabel (4. Grades)
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$	Polynom, ganz rationale Funktion (n. Grades)

Für alle hier vorgestellten Funktionen gilt: D_f = **R**.

Datenblatt: Gleichungen

Gleichungen bestehen aus zwei durch ein Gleichheitszeichen verbundene Terme (linke, rechte Seite der Gleichung; Term 1 = Term 2), von denen mindestens einer eine Variable (Unbekannte) x enthält. Gleichungen können (gegebenenfalls) mit Gleichungsumformungen (mit Termumformungen) nach der Variable umgeformt bzw. aufgelöst werden. Im Folgenden seien alle Unbekannten x und Koeffizienten reell.

Lineare Gleichungen sind Gleichungen mit der Variablen x, die der Form:

$$ax + b = 0$$

mit den Zahlen a, b genügen. Die Lösung der linearen Gleichung ist für $a \neq 0$ dann:

$$x = -\frac{b}{a}$$

Die lineare Gleichung ax + b = 0 entspricht damit grafisch der Nullstelle einer Geraden y = ax + b mit Steigung a und y-Achsenabschnitt b.

Quadratische Gleichungen sind von der Form:

$ax^2 + bx + c = 0$			
$a \neq 0$, b = 0	$a \neq 0$, c = 0	$a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$	a =1, b = p, c = q
$ax^2 + c = 0$ $ax^2 = -c$ $x^2 = -\frac{c}{a}$ $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$	$ax^2 + bx = 0$ $x(ax+b) = 0$ $x = 0 \vee ax + b = 0$ $x = 0 \vee ax = -b$ $x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$	$ax^2 + bx + c = 0$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 + px + q = 0$ $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
Rein quadratische Gleichung: 0 Lösungen (bei $-\frac{c}{a}$<0), 1 Lösung (bei c=0), 2 Lösungen (bei $-\frac{c}{a}$>0)	Gemischt quadratische Gleichung (Ausklammern): 2 Lösungen	Gemischt quadratische Gleichung (Mitternachtsformel): D = $b^2 - 4ac$ als Diskriminante -> 0 Lösungen (bei D<0) 1 Lösung (bei D=0) 2 Lösungen (bei D>0)	Gemischt quadratische Gleichung (p-q-Formel): D = $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ als Diskriminante -> 0 Lösungen (bei D<0) 1 Lösung (bei D=0) 2 Lösungen (bei D>0)
	Quadratische Gleichung hat die Form: $ax(x - x_1) = 0$ (bei 2 Lösungen $x = 0$, $x = x_1 = -\frac{b}{a}$)	Quadratische Gleichung hat die Form: $a(x - x_1)^2 = 0$ (bei 1 Lösung $x = x_1$), $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ (bei 2 Lsg. $x = x_1$, $x = x_2$)	Quadratische Gleichung hat die Form: $(x - x_1)^2 = 0$ (bei 1 Lösung $x = x_1$), $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ (bei 2 Lsg. $x = x_1$, $x = x_2$)

Quadratische Gleichungen

Polynomgleichungen sind Gleichungen mit der Variablen x, die der Form:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

mit den Zahlen a_0, … a_n, $n \varepsilon \mathbf{N}$, genügen. Die Lösungen der Polynomgleichung sind u.U. durch Polynomdivision und Ausklammern oder durch Substitution zu erhalten.

Datenblatt: Mittlere, momentane Änderungsrate, Ableitung

Für zwei verschiedene Punkte $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ auf der Zahlenebene ergibt sich die Steigung m als:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ (Differenzenquotient)}$$

Der Steigung entspricht ein Steigungswinkel $\varphi = \tan^{-1}(m)$.

Liegen die Punkte P und Q auf einer Funktion f: D_f -> **R**, gilt also: $P(x_1|f(x_1))$ und $Q(x_2|f(x_2))$, so wird der Differenzenquotient zur mittleren (durchschnittlichen) Änderungsrate der Funktion auf dem Intervall $[x_1; x_2] \subset D_f$:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \text{ (mittlere Änderungsrate)}$$

Die mittlere Änderungsrate der Funktion f(x) auf einem vorgegebenen Intervall $[a; b] \subset D_f$ ist:

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ (mittlere Änderungsrate)}$$

Haben für eine Funktion f: D_f -> **R** und ein $x_0 \varepsilon D_f$ die Punkte P und Q die Form $P(x_0|f(x_0))$ und $Q(x_0+h|f(x_0+h))$, so wird die mittlere Änderungsrate

$$m(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

beim Grenzübergang h -> 0 im Falle der Existenz des Grenzwerts zur momentanen Änderungsrate oder Ableitung der Funktion f im Punkt x_0:

$$m(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \xrightarrow[h->0]{} m_t = f'(x_0) \text{ (momentane Änderungsrate)}$$

mit m_t als Steigung der Tangente t im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ an die Funktion f(x):

$$t: \; y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \text{ (Tangente)}$$

Für eine Funktion f: D_f -> **R** und ein $x_0 \varepsilon D_f$ heißt $f'(x_0)$ im Falle der Differenzierbarkeit von f in x_0 die Ableitung der Funktion f im Punkt x_0. Die Ableitung $f'(x_0)$ ist die Steigung oder Tangentensteigung von f in x_o, die Ableitungen in allen Punkten $x \varepsilon D_{f'}$ bilden die Ableitungsfunktion f': $D_{f'}$ -> **R** mit der Funktionsvorschrift f'(x). Höhere Ableitungen sind: f''(x) = (f'(x))', f'''(x) = (f''(x))' usw. Die Ermittlung der Ableitungsfunktionen f'(x) usw. erfolgt über die Ableitungsregeln (für Funktionen u(x), v(x) und reelle Zahlen k, r):

$$(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x) \text{ (Summenregel)}$$

$$(u(x) + r)' = u'(x) \text{ (additive Konstante)}$$

$$(ku(x))' = ku'(x) \text{ (multiplikative Konstante, konstanter Faktor)}$$

$$(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x) \text{ (Kettenregel: äußere Ableitung × innere Ableitung)}$$

Für ganz rationale Funktionen (mit reellen a, b, n, r) stellen sich die Ableitungsregeln wie folgt dar:

$$(r)' = 0, \; (x^n)' = nx^{n-1}, \; ((ax+b)^n)' = na(ax+b)^{n-1} \text{ (Potenzregel)}$$

Datenblatt: Tangenten

Tangenten sind Geraden $t(x) = y = m_t x + c_t$ an eine Funktion f(x) in einem Punkt $B(x_0|f(x_0)) = B(u|f(u))$, dem sog. Berührpunkt. Im Berührpunkt stimmen Funktion und Tangente in Funktionswert und Steigung überein, d.h. es gilt:

$$f(x_0) = y(x_0) = t(x_0)$$
$$f'(x_0) = m_t$$

Möglichkeit 1	**Möglichkeit 2**	**Möglichkeit 3**
Funktion f(x), Stelle x_0	Funktion f(x), Stelle u	Funktion f(x), Stelle x_0
1. Ableitung f'(x)	1. Ableitung f'(x)	1. Ableitung f'(x)
Funktionswert $f(x_0)$, Steigung $f'(x_0)$	Funktionswert f(u), Steigung f'(u)	Ansatz: y = mx + c als Tangentenformel
Einsetzen in Tangentenformel	Einsetzen in Tangentenformel	Steigung $m = f'(x_0)$
Tangente: t: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$	Tangente: t: $y = f'(u)(x - u) + f(u)$	y-Achsen-Abschnitt $c = f(x_0) - mx_0$

Tangente

Ein Berührpunkt $B(x_0|y_0)$ zwischen zwei Funktionen f(x) und g(x) hat die Eigenschaften:

$$f(x_0) = g(x_0) = y_o$$
$$f'(x_0) = g'(x_0)$$

Zur Bestimmung von Berührpunkten ist zunächst die einfache der beiden Gleichungen nach x_0 aufzulösen und x_0 in die andere Gleichung zur Überprüfung der Gleichheit einzusetzen.

Tangenten sind Geraden t: $y = f'(x_B)(x - x_B) + f(x_B)$ bzw. t: $y = f'(u)(x - u) + f(u)$ an eine Funktion f(x) in einem Punkt $B(x_B|f(x_B)) = B(u|f(u))$, dem sog. Berührpunkt. Im Folgenden sollen Tangenten durch einen vorgegebenen Punkt $P(x_1|y_1)$ an eine Funktion f(x) gelegt werden:

Möglichkeit 1	**Möglichkeit 2**	**Möglichkeit 3**
Funktion f(x), Berührstelle x_B	Funktion f(x), Berührstelle u	Funktion f(x), Berührstelle u
1. Ableitung f'(x)	1. Ableitung f'(x)	1. Ableitung f'(x)
Tangentengleichung mit Punkt $P(x_1|y_1)$ auf der Tangente: $y_1 = f'(x_B)(x_1 - x_B) + f(x_B)$ (*)	Tangentengleichung mit Punkt $P(x_1|y_1)$ auf der Tangente: $y_1 = f'(u)(x_1 - u) + f(u)$ (*)	Steigung zwischen Berührpunkt und Punkt $P(x_1|y_1)$ als Tangentensteigung im Berührpunkt: $\frac{y_1 - f(u)}{x_1 - u} = f'(u)$ (*)
Auflösen der Gleichung (*) nach x_B -> Lösung(en) x_B -> Berührpunkt(e) $B(x_B|f(x_B))$	Auflösen der Gleichung (*) nach u -> Lösung(en) u -> Berührpunkt(e) B(u|f(u))	Auflösen der Gleichung (*) nach u -> Lösung(en) u -> Berührpunkt(e) B(u|f(u))
Einsetzen der Lösung(en) x_B in Tangentenformel -> Tangente(n) t: $y = f'(x_B)(x - x_B) + f(x_B)$	Einsetzen der Lösung(en) u in Tangentenformel -> Tangente(n) t: $y = f'(u)(x - u) + f(u)$	Einsetzen der Lösung(en) u in Tangentenformel -> Tangente(n) t: $y = f'(u)(x - u) + f(u)$

Tangente an eine Funktion durch einen Punkt

Datenblatt: Funktionsuntersuchung (ganz rationale Funktionen, Polynome)

Eine <u>ganz rationale Funktion</u> (Polynom) f: **R** -> **R** ist vom Typ:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

(für natürliche Zahlen n und reelle Koeffizienten a_0, …, a_n). n heißt der Grad der ganz rationalen Funktion.

Die <u>Kurvendiskussion</u> ermittelt die Besonderheiten der aus einer Funktion f(x) sich ergebenden Kurve im x-y-Koordinatensystem, des Graphen von f(x). Hinsichtlich einer ganz rationalen Funktion f(x) heißt das:

Zentrale Punkte der Kurvendiskussion
Funktion: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$
I. Ableitungen (nach Potenz- und Summenregel sowie Regel vom konstanten Faktor): $f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + ... + a_1$ $f''(x) = n(n-1) a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_{n-1} x^{n-3} + ... + 2a_2$ $f'''(x) = n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3) a_{n-1} x^{n-4} + ... + 6a_3$
II. Nullstellen (Anzahl maximal n; Gleichung f(x) = 0 lösen): f(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> N(x_1|0), N(x_2|0), … (Nullstellen mit gerader Vielfachheit als Hoch-/Tiefpunkte ohne Vorzeichenwechsel; Nullstellen mit ungerader Vielfachheit mit Vorzeichenwechsel)
III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Anzahl maximal n-1; Gleichung f'(x) = 0 lösen, Lösungen in f''(x) einsetzen): a) f'(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f''(x_1) < 0 -> H(x_1|f(x_1)) oder f''(x_1) > 0 -> T(x_1|f(x_1)); f''(x_2) < 0 -> H(x_2|f(x_2)) oder f''(x_2) > 0 -> T(x_2|f(x_2)); …
IV. Wendepunkte (Anzahl maximal n-2; Gleichung f''(x) = 0 lösen, Lösungen in f'''(x) einsetzen): a) f''(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f'''(x_1) ≠ 0 -> W(x_1|f(x_1)); f'''(x_2) ≠ 0 -> W(x_2|f(x_2)); …
IVa. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach III. und IV.) gilt: f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) ≠ 0 -> S(x_0|f(x_0))

Kurvendiskussion ganz rationaler Funktionen

Zusätzliche Punkte der Kurvendiskussion
V. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach III.]; bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall): – Monotonieintervall (-∞, x_1): f(x) monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, f'(x_0)>0) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, f'(x_0)<0); – Monotonieintervall (x_1, x_2): f(x) monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie f'(x_0)>0); … – Monotonieintervall (x_n, ∞): f(x) monoton fallend (x_n als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, f'(x_0)>0)
VI. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach [IV.]; bei Wendepunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall): – Krümmungsintervall (-∞, x_1): f(x) links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, f''(x_0)>0) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, f''(x_0)<0); – Krümmungsintervall (x_1, x_2): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, f''(x_0)<0) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, f''(x_0)>0); … – Krümmungsintervall (x_n, ∞): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, f''(x_0)<0) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, f''(x_0)>0)
VII. Symmetrie: a) Achsensymmetrie (zur y-Achse): f(-x) = f(x) oder: nur gerade Exponenten im Term von f(x) (gerade) b) Punktsymmetrie (zum Ursprung): f(-x) = -f(x) oder: nur ungerade Exponenten im Term von f(x) (ungerade) c) f(x) achsensymmetrisch -> f'(x) punktsymmetrisch -> f''(x) achsensymmetrisch usw. f(x) punktsymmetrisch -> f'(x) achsensymmetrisch -> f''(x) punktsymmetrisch usw.

VIII. Verhalten für betragsmäßig große x (x->∞, x->-∞) (n als Grad der ganz rationalen Funktion):

$a_n>0$	n ungerade	n gerade	$a_n<0$	n ungerade	n gerade
x->∞	f(x) -> ∞	f(x) -> ∞	x->∞	f(x) -> -∞	f(x) -> -∞
x->-∞	f(x) -> -∞	f(x) -> ∞	x->-∞	f(x) -> ∞	f(x) -> -∞

Kurvendiskussion ganz rationaler Funktionen

Datenblatt: Bestimmungsaufgabe (ganz rationale Funktionen, Polynome)

Eine ganz rationale Funktion (Polynom) f: **R** -> **R** ist vom Typ:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

(für natürliche Zahlen n und reelle Koeffizienten a_0, …, a_n). n heißt der Grad der ganz rationalen Funktion. Im Folgenden sei der Grad n ≤ 4.

Im Rahmen von Bestimmungsaufgaben für ganz rationale Funktionen werden die Koeffizienten des gesuchten Funktionsterms auf Grund gegebener Eigenschaften der Funktion ermittelt:

Geraden	
Funktion: y = mx + b (m als Steigung, b als y-Achsen-Abschnitt)	
Punkt $P(x_1\|y_1)$, Steigung m	Punkte $P(x_1\|y_1)$, $Q(x_2\|y_2)$
Punktsteigungsform: $\frac{y-y_1}{x-x_1} = m$	Zweipunkteform: $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
Umstellen zu: $y = m(x-x_1) + y_1$	Umstellen zu: $y = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) + y_1$
	Steigung: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
Ursprungsgerade y = mx (durch den Ursprung): $y = \frac{y_1}{x_1}x$ mit: $m = \frac{y_1}{x_1}$	

Bestimmungsaufgabe für Geraden

Parabeln	
Funktion: $f(x) = ax^2 + bx + c$ (Normalform), $f(x) = a(x-x_S)^2 + y_S$ (Scheitelform)	
Scheitelpunkt $S(x_S\|y_S)$:	$f(x) = a(x-x_S)^2 + y_S$
Punkt $P(x_1\|y_1)$:	$f(x_1) = a(x_1-x_S)^2 + y_S = y_1$ -> $a = \frac{y_1-y_S}{(x_1-x_S)^2}$

Bestimmungsaufgabe für Parabeln (2. Grades, Scheitelform)

Funktion 2. Grades	**Funktion 3. Grades**	**Funktion 4. Grades**
	Funktion und Ableitungen:	
$f(x) = ax^2 + bx + c$ $f'(x) = 2ax + b$	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $f''(x) = 6ax + 2b$	$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$
3 Unbekannte a, b, c-> 3 Funktionseigenschaften -> 3 Gleichungen	4 Unbekannte a, b, c, d -> 4 Funktionseigenschaften -> 4 Gleichungen	5 Unbekannte a, b, c, d, e -> 5 Funktionseigenschaften -> 5 Gleichungen
	Lineare Gleichungen vom Typ:	
$f(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c = y_1$ $f'(x_2) = 2ax_2 + b + c = y_2$	$f(x_1) = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = y_1$ $f'(x_2) = 3ax_2^2 + 2bx_2 + c = y_2$ $f''(x_3) = 6ax_3 + 2b = y_3$	$f(x_1) = ax_1^4 + bx_1^3 + cx_1^2 + dx_1 + e = y_1$ $f'(x_2) = 4ax_2^3 + 3bx_1^3 + 2cx_2 + d = y_2$ $f''(x_3) = 12ax_3^2 + 6bx_3 + 2c = y_3$
	für bestimmte x- und y-Werte	
Aufstellen des linearen Gleichungssystems: Gleichungen mit Unbekannten a, b, … gemäß den Funktionseigenschaften: Punkt $P(x_1\|y_1)$: $f(x_1) = y_1$ Nullstelle x_0 bzw. $N(x_0\|0)$: $f(x_0) = 0$ Ursprung O(0|0) als Funktionspunkt: f(0) = 0 y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0\|y_0)$: $f(0) = y_0$ Schnittstelle x_1 mit Funktion g(x): $f(x_1) = g(x_1)$		

Steigung m in x_1:	$f'(x_1) = m$
Berührpunkt x_1 mit der x-Achse:	$f(x_1) = 0$, $f'(x_1) = 0$
Ursprung O(0|0) als Berührpunkt:	$f(0) = 0$, $f'(0) = 0$
Tangente y = mx+c in x_1:	$f(x_1) = y(x_1) = mx_1+c$, $f'(x_1) = m$
Normale y = mx+c in x_1:	$f(x_1) = y(x_1) = mx_1+c$, $f'(x_1) = -1/m$
Berührpunkt x_1 mit Funktion g(x):	$f(x_1) = g(x_1)$, $f'(x_1) = g'(x_1)$
Hoch-/Tiefpunkt x_E:	$f'(x_E) = 0$
Hoch-/Tiefpunkt H/T(x_E|$y_€$):	$f(x_E) = y_E$, $f'(x_E) = 0$
Krümmung k in x_1:	$f''(x_1) = k$
Wendepunkt x_W:	$f''(x_W) = 0$
Wendepunkt W(x_W|y_W):	$f(x_W) = y_W$, $f''(x_W) = 0$
Wendetangente y = mx+c in x_W:	$f(x_W) = y(x_W) = mx_W+c$, $f'(x_W) = m$, $f''(x_W) = 0$
Wendenormale y = mx+c in x_W:	$f(x_W) = y(x_W) = mx_W+c$, $f'(x_W) = -1/m$, $f''(x_W) = 0$
Sattelpunkt x_S:	$f'(x_S) = 0$, $f''(x_S) = 0$
Sattelpunkt S(x_S|y_S)::	$f(x_S) = y_S$, $f'(x_S) = 0$, $f''(x_S) = 0$

Lösen des linearen Gleichungssystems (etwa mit dem Gauß-Algorithmus) -> Errechnung der Unbekannten a, b, … ->

Aufstellen der Funktionsgleichung:

$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Bestimmungsaufgabe für ganz rationale Funktionen (2.-4. Grades)

Funktion 2. Grades (Symmetrie zur y-Achse) (f(-x) = f(x))	**Funktion 3. Grades (Symmetrie zum Ursprung)** (f(-x) = -f(x))	**Funktion 4. Grades (Symmetrie zur y-Achse)** (f(-x) = f(x))
$f(x) = ax^2 + c$ $f'(x) = 2ax$	$f(x) = ax^3 + cx$ $f'(x) = 3ax^2 + c$ $f''(x) = 6ax$	$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ $f'(x) = 4ax^3 + 2cx$ $f''(x) = 12ax^2 + 2c$
2 Unbekannte a, c-> 2 Funktionseigenschaften -> 2 Gleichungen	2 Unbekannte a, c -> 2 Funktionseigenschaften -> 2 Gleichungen	3 Unbekannte a, c, e -> 3 Funktionseigenschaften -> 3 Gleichungen

Lineare Gleichungen vom Typ:

$f(x_1) = ax_1^2 + c = y_1$ $f'(x_2) = 2ax_2 = y_2$	$f(x_1) = ax_1^3 + cx_1 = y_1$ $f'(x_2) = 3ax_2^2 + c = y_2$ $f''(x_3) = 6ax_3 = y_3$	$f(x_1) = ax_1^4 + cx_1^2 + e = y_1$ $f'(x_2) = 4ax_2^3 + 2cx_2 = y_2$ $f''(x_3) = 12ax_3^2 + 2c = y_3$

für bestimmte x- und y-Werte

Aufstellen des linearen Gleichungssystems:

Gleichungen mit Unbekannten a, c, … gemäß den Funktionseigenschaften:

Punkt P(x_1|y_1):	$f(x_1) = y_1$
Nullstelle x_0 bzw. N(x_0|0):	$f(x_0) = 0$
Ursprung O(0|0) als Funktionspunkt:	$f(0) = 0$
y-Achsenabschnittspunkt S_y(0|y_0):	$f(0) = y_0$
Schnittstelle x_1 mit Funktion g(x):	$f(x_1) = g(x_1)$
Steigung m in x_1:	$f'(x_1) = m$
Berührpunkt x_1 mit der x-Achse:	$f(x_1) = 0$, $f'(x_1) = 0$
Ursprung O(0|0) als Berührpunkt:	$f(0) = 0$, $f'(0) = 0$
Tangente y = mx+c in x_1:	$f(x_1) = y(x_1) = mx_1+c$, $f'(x_1) = m$
Normale y = mx+c in x_1:	$f(x_1) = y(x_1) = mx_1+c$, $f'(x_1) = -1/m$
Berührpunkt x_1 mit Funktion g(x):	$f(x_1) = g(x_1)$, $f'(x_1) = g'(x_1)$
Hoch-/Tiefpunkt x_E:	$f'(x_E) = 0$
Hoch-/Tiefpunkt H/T(x_E|$y_€$):	$f(x_E) = y_E$, $f'(x_E) = 0$
Krümmung k in x_1:	$f''(x_1) = k$
Wendepunkt x_W:	$f''(x_W) = 0$
Wendepunkt W(x_W|y_W):	$f(x_W) = y_W$, $f''(x_W) = 0$
Wendetangente y = mx+c in x_W:	$f(x_W) = y(x_W) = mx_W+c$, $f'(x_W) = m$, $f''(x_W) = 0$
Wendenormale y = mx+c in x_W:	$f(x_W) = y(x_W) = mx_W+c$, $f'(x_W) = -1/m$, $f''(x_W) = 0$
Sattelpunkt x_S:	$f'(x_S) = 0$, $f''(x_S) = 0$
Sattelpunkt S(x_S|y_S)::	$f(x_S) = y_S$, $f'(x_S) = 0$, $f''(x_S) = 0$

Lösen des linearen Gleichungssystems (etwa mit dem Gauß-Algorithmus) -> Errechnung der Unbekannten a, c, … ->		
	Aufstellen der Funktionsgleichung:	
$f(x) = ax^2 + c$	$f(x) = ax^3 + cx$	$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$

Bestimmungsaufgabe für symmetrische ganz rationale Funktionen (2.-4. Grades)

Datenblatt: Erlös-, Kostenfunktionen

Im Rahmen der betrieblichen Organisation eines (Produktions-) Unternehmens spielt der Absatz als Endpunkt des betrieblichen Prozesses, als Verwertung des im Betrieb Er-stellten (Produkt) eine wichtige Rolle. Absatz ist damit Leistungsverwertung, d.h. Bereitstellung der betrieblichen Leistung für den Markt als Kontaktzone von Angebot und Nachfrage. Von Seiten des Betriebs gehören zum Absatz: Absatzplanung und -vorbereitung mit den Mitteln der Marktanalyse und Marktbeobachtung; Absatzpolitik mit Preis- und Mengenpolitik sowie dem (Produkt-) Marketing. Im Folgenden wird die Mengenpolitik eines Unternehmens unter den Bedingungen der vollkommenen Konkurrenz, des polypolistischen Marktes betrachtet.

Ein Unternehmen produziert ein Produkt mit einer Ausbringungsmenge x pro Zeiteinheit. Dabei entstehen fixe Gesamtkosten K_{fix} und variable Stückkosten k_{var}. Als Gesamtkosten $K = K_{ges}$ ergeben sich für eine Ausbringungsmenge x:

$$K(x) = K_{ges}(x) = K_{fix} + K_{var}(x) = K_{fix} + x \cdot k_{var}(x)$$

Variable Gesamtkosten K_{var} sind dabei: $K_{var}(x) = x \cdot k_{var}(x)$. Als Stückkosten (= Kosten pro produziertes Stück) ergeben sich die fixen Stückkosten k_{fix}, die variablen Stückkosten k_{var} und die Gesamtstückkosten k_{ges} als:

$$k_{fix} = \frac{K_{fix}}{x}$$

$$k_{var} = \frac{K_{var}}{x}$$

$$k_{ges} = k_{fix} + k_{var} = \frac{K_{fix}}{x} + \frac{K_{var}}{x} = \frac{K_{ges}}{x}$$

Bei konstanten variablen Stückkosten k_{var} ist die Gesamtkostenfunktion $K_{ges}(x) = K_{ges}(x) = K_{fix} + x \cdot k_{var}(x)$ eine Gerade mit y-Achsenabschnitt K_{fix} und Steigung k_{var}. Die Gesamtstückkostenkurve $k_{ges} = k_{ges}(x) = \frac{K_{fix}}{x} + k_{var}$ ist eine hyperbelähnliche Funktion, die für wachsende Ausbringungsmengen x sich der Kurve der variablen Stückkosten k_{var} annähert. Die Grenzkosten $K' = K'_{ges}$ sind dann die Ableitung der Gesamtkosten $K = K_{ges}$. Der Verkauf eines Produktes durch ein Unternehmen bringt diesem Erlöse pro Zeiteinheit ein, die abhängig von der Ausbringungsmenge x des Produkts sind. Der vom Markt (bei vollständiger Konkurrenz) vorgegebene Verkaufspreis p als Stückerlös gibt den Erlös pro Stück beim Verkauf des Produkts an, der Gesamterlös E ergibt sich dann als:

$$E(x) = p \cdot x$$

und stellt damit im Koordinatensystem von Ausbringungsmenge x und Erlös eine Gerade durch den Ursprung dar mit dem Stückerlös p als Steigung:
Die Ableitung der Erlösfunktion E heißt Grenzerlös E' mit: $E'(x) = p$ und ist identisch mit dem Marktpreis p. Wegen $E(x) = px$ ist der Grenzerlös auch Stückerlös e(x), da:

$$e(x) = \frac{E(x)}{x} = \frac{px}{x} = p = E'(x)$$

Stellt man nun die Kostenfunktion der Gesamtkosten K_{ges} und die Funktion des Erlöses E gegenüber, so ergibt sich für jede Ausbringungsmenge x eine besondere Höhe der Kosten $K(x) = K_{ges}(x)$ und des Erlöses E(x). Der Gewinn G ist dann die Differenz von Erlös und Kosten:

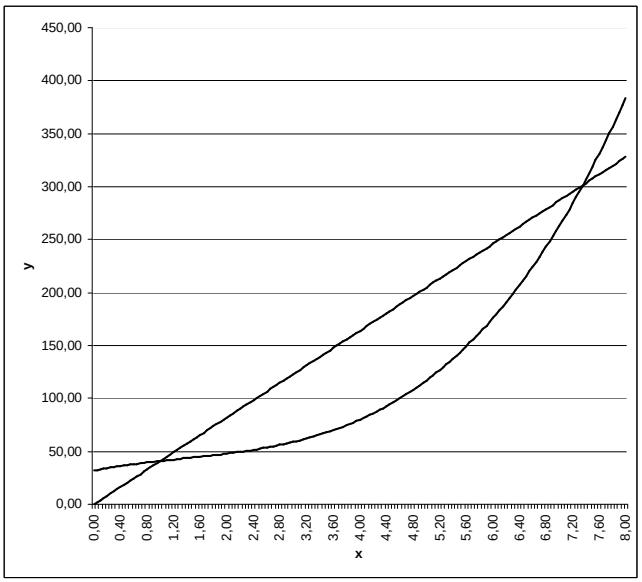
$$G(x) = E(x) - K(x)$$

und als Gewinn für positive Werte, als Verlust für negative interpretierbar. Die Ausbringungsmenge x_s mit $G(x_s) = 0$, also Gewinn = 0, heißt Nutzenschwelle. Für die Nutzenschwelle x_s gilt:

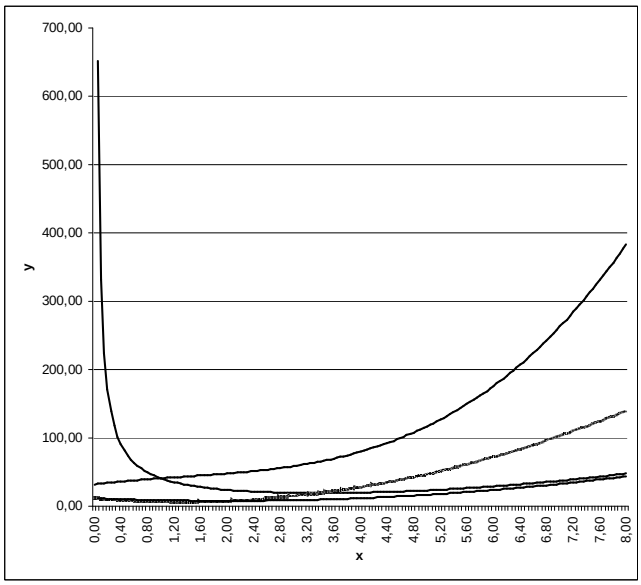
$$E(x_s) = K(x_s)$$

Bei der Nutzenschwelle (break even point) wird damit die Gewinnzone des Unternehmens erreicht. Eine eventuell existierende zweite Stelle x_G mit $G(x_G) = 0$ und $x_s < x_g$ heißt <u>Nutzengrenze</u> mit:

$$E(x_g) = K(x_g)$$



Erlös E(x), Gesamtkosten K(x)



Gesamtkosten K(x), Durchschnittskosten k(x), variable Durchschnittskosten $k_{var}(x)$, Grenzkosten K'(x)

Im Koordinatensystem von Ausbringungsmenge x und Erlös bzw. Kosten werden Nutzenschwelle x_s und Nutzengrenze x_g also durch den Schnittpunkt von Erlösgeraden und Kostenfunktion repräsentiert, die Gewinnzone, dargestellt durch die Ausbringungsmengen x mit $G(x) > 0$, ist damit zu umschreiben mit: $x_s < x < x_g$. Gemäß den Regeln der Differenzialrechnung erhält man das Gewinnmaximum der Gewinnfunktion $G(x) = E(x) – K(x)$, indem man die Ableitung $G'(x) = 0$ setzt. Für das <u>Gewinnmaximum</u> x_m gilt damit:

$$E'(x_m) = K'(x_m),\ p = K'(x_m)$$

Also sind hier Grenzerlös gleich Grenzkosten bzw. Grenzkosten gleich Stückerlös (Verkaufspreis). Auf Grund von $G''(x_m) < 0$ liegt dann in der Tat ein Maximum vor. $G_{max} = G(x_m)$ ist dann der maximale Gewinn. Für eine Ausbringungsmenge x ergibt sich der Stückgewinn g(x) als:

$$g(x) = \frac{G(x)}{x} = \frac{E(x)}{x} - \frac{K(x)}{x} = e(x) - k(x) = p - k(x)$$

Der <u>Stückgewinn</u> ist also die Differenz aus Preis und Stückkosten. Dem Betriebsminimum entspricht die Ausbringungsmenge x_{min}, bei der die variablen Stückkosten k_{var} minimal sind. Mit $k_{var} = \frac{K_{var}}{x}$ gilt im <u>Betriebsminimum</u>: $k'_{var}(x_{min}) = 0$ und damit:

$$K'(x_{min}) = K'_{var}(x_{min}) = \frac{K_{var}(x_{min})}{x_{min}} = k_{var}(x_{min})$$

mit: $k''_{var}(x_{min}) > 0$. D.h.: Im Betriebsminimum x_{min} stimmen die (variablen) Grenzkosten $K' = K'_{var}$ mit den variablen Stückkosten k_{var} überein, die Grenzkosten schneiden die Funktion der variablen Stückkosten in deren Minimum. Die <u>kurzfristige Preisuntergrenze</u> ist dann:

$$p_{kf} = k_{var}(x_{min})$$

Sie stellt daher den Marktpreis $k_{var}(x_{min}) \leq p$ dar, zu dem im Betriebsminimum das Unternehmen die Warenmenge x_{min} absetzen kann, wenn es bereit ist, dabei einen Verlust in Höhe der fixen Kosten K_{fix} zu machen, also: $G(x_{min}) = –K_{fix}$. Dem <u>Betriebsoptimum</u> entspricht die Ausbringungsmenge x_{opt},

bei der die gesamten Stückkosten minimal sind. Mit K = K_{ges} und $k = \frac{K}{x}$ gilt im Betriebsoptimum $k'(x_{opt}) = 0$ und damit:

$$K'(x_{opt}) = \frac{K(x_{opt})}{x_{opt}} = k(x_{opt})$$

mit: $k''(x_{opt}) > 0$. D.h.: Im Betriebsoptimum x_{opt} stimmen die Grenzkosten K' mit den gesamten Stückkosten k überein, die Grenzkosten schneiden die Funktion der Stückkosten in deren Minimum. Als <u>langfristige Preisuntergrenze</u> ergibt sich:

$$p_{lf} = k(x_{opt})$$

Sie stellt daher den Marktpreis $k(x_{opt}) \leq p$ dar, zu dem im Betriebsoptimum das Unternehmen die Warenmenge x_{opt} absetzen kann, bei der die fixen Kosten K_{fix} und die variablen Kosten $K_{var}(x_{opt})$ gerade gedeckt sind, also: $G(x_{opt}) = 0$. Wegen $k_{var}(x) < k(x)$ ist bei $K'(x) > 0$: $x_{min} < x_{opt}$, $p_{kf} < p_{lf}$. Ein anderer Zugang zur langfristigen Preisuntergrenze ergibt sich, wenn wir uns vorstellen, die Erlöskurve E(x) um den Koordinatenursprung so zu drehen, dass sie zu einer Tangente an die Gesamtkostenfunktion K(x) wird. Wir erhalten dann mit $E_{lf}(x) = p_{lf}x$ die Erlöskurve, die in x_{opt} die Kostenkurve berührt, so dass also ebenfalls gilt:

$$K'(x_{opt}) = \frac{K(x_{opt})}{x_{opt}} = k(x_{opt})$$

Durch Drehung der Erlösfunktion erhalten wir entsprechend eine Tangente an die Kurve der variablen Gesamtkosten und somit das Betriebsminimum. Es bleibt noch (zusammenfassend) zu erwähnen, dass bei der Ausbringungsmenge des Betriebsoptimums die Stückkosten minimal sind, d.h. der Stückgewinn g(x) = p – k(x) maximal wird. Für die Gesamtkosten K(x) = $K_{ges}(x)$ und deren Ableitung, die Grenzkosten K'(x), ergibt sich das <u>Minimum der Grenzkosten</u> mit:

$$K''(x_{mg}) = 0$$

und mit: $K'''(x_{mg}) > 0$. Das Minimum gibt damit an, bei welcher Ausbringungsmenge x_{mg} die Gesamtkosten am geringsten steigen (minimaler Kostenzuwachs), und kennzeichnet damit den Wendepunkt der Gesamtkostenfunktion K(x). Im Betriebsminimum sind – wie gesehen – die variablen Stückkosten minimal, d.h. für die entsprechende Ausbringungsmenge x_{min} gilt: $k'_{var}(x_{min}) = 0$. Das Minimum der Grenzkosten wird erreicht bei x_{mg} mit: $K''(x_{mg}) = 0$. Dann gilt (mit einer kubischen Kostenfunktion, ganz rationalen Funktion 3. Grades) hinsichtlich des Verhältnisses der Ausbringungsmengen von minimalen Grenzkosten und Betriebsminimum:

$$x_{mg} : x_{min} = 2 : 3$$

Wir setzen im polypolistischen Rahmen eine kubische Kostenfunktion, eine ganz rationale Funktion 3. Grades voraus. Zur <u>Bestimmung von Kosten- und Erlösfunktion</u> ist mit x als ME der folgende Ansatz gültig:

$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (Kostenfunktion)
$K_{fix} = d$ (Fixkosten)
$K_{var}(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ (variable Kosten)
$K'(x) = K'_{var}(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ (Grenzkosten)
$k(x) = ax^2 + bx + c + d/x$ (Durchschnittskosten = Stückkosten)
$k_{fix}(x) = d/x$ (fixe Durchschnittskosten = fixe Stückkosten)
$k_{var}(x) = ax^2 + bx + c$ (variable Durchschnittskosten = variable Stückkosten)
$k'(x) = 2ax + b - d/x^2$ (Grenzdurchschnittskosten = Grenzstückkosten)
$k_{var}'(x) = 2ax + b$ (variable Grenzdurchschnittskosten = variable Grenzstückkosten)
$E(x) = px$ (Erlösfunktion, p als Markt-/Verkaufspreis)
$E'(x) = p$ (Grenzerlös)

$G(x) = E(x) – K(x) = px – ax^3 – bx^2 – cx – d$ (Gewinnfunktion)
$G'(x) = p – 3ax^2 – 2bx – c$ (Grenzgewinn)

Die Eigenschaften der Erlös- und Kostenfunktion können dann wie folgt ausgewertet werden:

Gesamtkosten y_0 bei Ausbringungsmenge x_0: $K(x_0) = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d = y_0$
Stückkosten y_0 bei Ausbringungsmenge x_0: $k(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c + d/x_0 = y_0$
Variable Stückkosten y_0 bei Ausbringungsmenge x_0: $k_{var}(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c = y_0$
Grenzkosten y_0 bei Ausbringungsmenge x_0: $K'(x_0) = 3ax_0^2 + 2bx_0 + c = y_0$
Gewinn g_0 bei Ausbringungsmenge x_0: $G(x_0) = px_0 – ax_0^3 – bx_0^2 – cx_0 – d = g_0$
Nutzenschwelle, Nutzengrenze bei Menge x_0: $G(x_0) = px_0 – ax_0^3 – bx_0^2 – cx_0 – d = 0$
Gewinnmaximum bei Ausbringungsmenge x_0: $G'(x_0) = p – 3ax_0^2 – 2bx_0 – c = 0$
Betriebsminimum bei Ausbringungsmenge x_0: $k_{var}'(x_0) = 2ax_0 + b = 0$ bzw.: $K'(x_0) = 3ax_0^2 + 2bx_0 + c = ax_0^2 + bx_0 + c = k_{var}(x_0)$
Kurzfristige Preisuntergrenze p_{kf} bei Menge x_0: $k_{var}(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c = p_{kf}$ bzw. $G(x_0) = p_{kf}x_0 – ax_0^3 – bx_0^2 – cx_0 – d = -d = -K_{fix}$
Betriebsoptimum bei Ausbringungsmenge x_0: $k'(x_0) = 2ax_0 + b – d/x_0^2 = 0$ bzw.: $K'(x_0) = 3ax_0^2 + 2bx_0 + c = ax_0^2 + bx_0 + c + d/x_0 = k(x_0)$
Langfristige Preisuntergrenze p_{lf} bei Menge x_0: $k(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c + d/x_0 = p_{lf}$ bzw. $G(x_0) = p_{lf}x_0 – ax_0^3 – bx_0^2 – cx_0 – d = 0$

Es ergibt sich aus der Auswertung der Bedingungen Eigenschaften ein lineares Gleichungssystem, das mit dem Gauß-Algorithmus lösbar ist. Errechnet werden dabei die Unbekannten: a, b, c, d und p.

Im monopolistischen Fall eines Angebotsmonopols bestimmt der Anbieter den Preis seiner Ware. Dem Preis liegt die Preis-Absatz-Funktion zugrunde, also die Gerade:

$$p(x) = ax + b$$

mit $a<0$, $b>0$. Für die Erlösfunktion ergibt sich damit:

$$E(x) = p(x)\cdot x = (ax+b)x = ax^2 + bx$$

Der Erlösmaximum der Erlöskurve findet sich dann vermittelst: $E'(x) = 0$ an der Stelle:

$$x_{erl} = -\frac{b}{2a}$$

Unter der Voraussetzung der üblichen S-förmigen Kostenfunktion bestimmt sich dann das Gewinnmaximum vermöge: $G(x) = E(x) – K(x)$ wieder bei:

$$E'(x) = K'(x)$$

Die gewinnmaximale Menge x_m bestimmt den Cournotschen Preis $p_c = ax_m+b$ und den Cournotschen Punkt $C(x_m|ax_m+b)$.

Die kostentheoretischen Überlegungen z.B. hinsichtlich Betriebsminimum und Betriebsoptimum bleiben von der Situation des Angebotsmonopols unberührt.

Beispiel (Kosten-, Erlösfunktion):

Gegeben ist ein Unternehmen im Polypol. Zu bestimmen sind zunächst die Kostenfunktion als ganz rationale Funktion 3. Grades und die linear-proportionale Erlösfunktion einer Unternehmung zu folgenden Bedingungen:

(1) Die Fixkosten haben eine Höhe von 8 GE (Geldeinheiten).
(2) Als Stückkosten ergeben sich bei einer Produktionsmenge von 4 ME (Mengeneinheiten) 6 GE.
(3) Bei einer Produktionsmenge von 3 ME befindet sich das Betriebsminimum.
(4) Der Verkaufspreis pro ME beträgt 8 GE.
(5) Der Gewinn bei einer Produktionsmenge von 5 ME beträgt 4,5 GE.

Lösung: I. Es sind daher im Folgenden die Unbekannten a, b, c, d und p von Kostenfunktion $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ und $E(x) = px$ zu bestimmen, wobei die vorgenannten Bedingungen (1) bis (5) Verwendung finden

(Bestimmungsaufgabe für Polynome). Und zwar gilt:

(1) $K(0) = K_{fix} = \underline{d = 8}$.
(2) $k(4) = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c + d/4 = 16a + 4b + c + 2 = 6 \Rightarrow \underline{16a + 4b + c = 4}$.
(3) $k_{var}'(3) = 2a \cdot 3 + b = 0 \Rightarrow \underline{6a + b = 0}$.
(4) $\underline{p = 8} \Rightarrow E(x) = 8x$.
(5) $G(5) = p \cdot 5 - a \cdot 5^3 - b \cdot 5^2 - c \cdot 5 - d = 40 - 125a - 25b - 5c - 8 = 4{,}5 \Rightarrow$
$\underline{125a + 25b + 5c = 27{,}5}$.

Es ergibt sich also aus der Auswertung der Bedingungen (1) bis (5) ein lineares Gleichungssystem, das mit dem Gauß-Algorithmus lösbar ist. Die Lösungen (a, b, c) lauten neben d = 8 und p = 8 auf Grund der folgenden Umformungen:

Lineares Gleichungssystem:

$+ 16a + 4b + 1c = 4$

$+ 6a + 1b = 0$

$+ 125a + 25b + 5c = 27{,}5$

Anfangstableau:

16 4 1 | 4

6 1 0 | 0

125 25 5 | 27.5

1. Schritt: 8*(*2*) - 3*(*1*) / 16*(*3*) - 125*(*1*)

16 4 1 | 4

0 -4 -3 | -12

0 -100 -45 | -60

2. Schritt: -1*(*3*) + 25*(*2*)

16 4 1 | 4

0 -4 -3 | -12

0 0 -30 | -240

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$+ 16a + 4b + 1c = 4$

$- 4b - 3c = -12$

$- 30c = -240$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:
$\underline{c = 8}$, $\underline{b = -3}$, $\underline{a = 0.5}$.

II. Insgesamt lauten die gesuchten Funktionen:

$K(x) = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 8x + 8$ (Kostenfunktion [GE])
$E(x) = 8x$ (Erlösfunktion [GE])
$G(x) = -0{,}5x^3 + 3x^2 - 8$ (Gewinnfunktion [GE]; Gewinnfunktion als Differenz von Erlös- und Kostenfunktion).

Nun werten wir Erlös- und Kostenfunktion aus.

III. Bei <u>Nutzenschwelle</u> und <u>Nutzengrenze</u> gilt:

$E(x) = K(x)$,

also wegen $E(x) - K(x) = 0$:

$G(x) = 0$.

Zur Bestimmung von Nutzenschwelle (break even point) und Nutzengrenze ist also die Gleichung:

$-0{,}5x^3 + 3x^2 - 8 = 0$

zu lösen. Damit ergibt sich:

$0{,}5x^3 - 3x^2 + 8 = 0$

und aus der obigen Zeichnung eine Lösung x = 2 ME und weiter wegen:

$0{,}5x^2 - 2x - 4 = 0$

die weiteren Lösungen:

[x = -3,46], x = 5,46 ,

wobei die negative Lösung wegfällt. Nutzenschwelle ist also: x = 2 ME mit G(2) = 0 GE, Nutzengrenze x = 5,46 ME mit G(5,46) = 0 GE. Die Gewinnzone des Unternehmens liegt zwischen Nutzenschwelle und Nutzengrenze.

IV. Die Produktionsmenge x mit dem maximalen Gewinn errechnet sich aus dem Nullsetzen der Ableitung, mithin des Grenzgewinns:

$G'(x) = 0$

Also ergibt sich mit $G(x) = -0{,}5x^3 + 3x^2 – 8$ und $G'(x) = = -1{,}5x^2 + 6x$:

$-1{,}5x^2 + 6x = 0$
$x(-1{,}5x+6) = 0$
$x = 0, -1{,}5x+6 = 0$
$x = 0, 6 = 1{,}5x$
$[x=0], x = 4$

Wegen $G''(x) = -3x + 6$ und $G''(4) = -3\cdot 4 + 6 = -6 < 0$ liegt bei der Produktionsmenge x = 4 ME das Gewinnmaximum vor. Der maximale Gewinn beträgt:

$G(4) = 8$ GE.

V. Die Stückkostenfunktion $k(x) = K(x)/x$, $x > 0$, lautet: $k(x) = 0{,}5x^2 – 3x + 8 + 8/x$. Das Minimum der Stückkosten k(x) errechnet sich mit:

$k'(x) = 0$,

also mit $k'(x) = x – 3 – 8/x^2$ aus:

$x – 3 – 8/x^2 = 0$
$x^3 – 3x^2 – 8 = 0$
$x = 3{,}6$

Aus der Durchschnittskostenfunktion kann man $k(3{,}6) = 5{,}9$ GE als minimale Durchschnittskosten entnehmen. Die Ausbringungsmenge der minimalen Stückkosten ist identisch mit dem Betriebsoptimum.

VI. Bzgl. der Kostenfunktion K(x) kann jetzt das Betriebsminimum oder die kurzfristige Preisuntergrenze $k_{var}(x_{min})$ bestimmt werden. Im Betriebsminimum x_{min} stimmen die (variablen) Grenzkosten $K' = K'_{var}$ mit den variablen Stückkosten k_{var} überein, die Grenzkosten schneiden die Funktion der variablen Stückkosten in deren Minimum. Die kurzfristige Preisuntergrenze stellt den Marktpreis $k_{var}(x_{min}) \leq p$ dar, zu dem im Betriebsminimum das Unternehmen die Warenmenge x_{min} absetzen kann, wenn es bereit ist, dabei einen Verlust in Höhe der fixen Kosten K_{fix} zu machen, also: $G(x_{min}) = –K_{fix}$. Grafisch stellt sich das Betriebsminimum als die Stelle dar, wo die Tangente vom Koordinatenursprung die Funktion der variablen Gesamtkosten $K_{var}(x)$ berührt. Hier ist: $K_{var}(x) = 0{,}5x^3 – 3x^2 + 8x$. Rechnerisch gilt auf Grund der Tatsache, dass an der Stelle x die Tangentensteigung $K_{var}'(x)$ identisch mit der Steigung der Gerade durch den Ursprung O(0|0) und den Punkt $P(x| K_{var}(x))$ sein muss:

$$k_{var}(x) = K_{var}(x)/x = K_{var}'(x)$$

und damit:

$$(0{,}5x^3 – 3x^2 + 8x)/x = 1{,}5x^2 – 6x + 8$$
$$0{,}5x^2 – 3x + 8 = 1{,}5x^2 – 6x + 8$$
$$x^2 – 3x = 0$$
$$x(x–3) = 0$$
$$[x = 0], x = 3$$

gemäß der Bedingung (3) in 1). Die kurzfristige Preisuntergrenze $k_{var}(3) = 3{,}5$ GE liegt beträchtlich unter dem hier angenommenen Marktpreis p = 8 GE. Da sich das Betriebsminimum nur auf die variablen Stückkosten bezieht, haben Änderungen bei den Fixkosten K_{fix} (etwa Senkung um 2 GE) hierauf keine Auswirkung. Entsprechendes gilt auch für die Ausbringungsmenge im Gewinnmaximum, da die Grenzkosten dieselben bleiben und $G'(x) = 0$, also $E'(x) = K'(x)$ gilt. Hingegen erhöht sich im (gleich bleibenden) Gewinnmaximum der maximale Gewinn um 2 GE, wenn die Fixkosten um 2 GE sinken.

VII. Eine weitere Vorgehensweise ergibt sich für die Ermittlung des Betriebsoptimums wie folgt. Bzgl. der Kostenfunktion K(x) entspricht das Betriebsoptimum der Ausbringungsmenge x_{opt}, bei der die gesamten Stückkosten minimal sind. Die langfristige Preisuntergrenze kann als $k(x_{opt})$ bestimmt werden. Des Weiteren lässt sich das Betriebsoptimum grafisch als die Ausbringungsmenge bestimmen, wo die Tangente vom Koordinatenursprung die Funktion der Gesamtkosten K(x) berührt mit: $K(x) = 0{,}5x^3 – 3x^2 + 8x + 8$.
Rechnerisch gilt:

$$k(x) = K(x)/x = K'(x)$$
$$(0{,}5x^3 – 3x^2 + 8x + 8)/x = 1{,}5x^2 – 6x + 8$$
$$0{,}5x^2 – 3x + 8 + 8/x = 1{,}5x^2 – 6x + 8$$
$$x^2 – 3x – 8/x = 0$$
$$x^3 – 3x^2 – 8 = 0$$
$$x = 3{,}6$$

Das Betriebsoptimum liegt bei x = 3,6 ME (siehe auch weiter oben), die langfristige Preisuntergrenze ist $k(3{,}6) = 5{,}9$ GE.

VIII. Die Ausbringungsmenge x mit minimalem Kostenzuwachs ist die Menge x_{mg} mit: $K''(x_{mg}) = 0$, also dort, wo die Kostenfunktion K(x) ihren Wendepunkt besitzt. Damit gilt hinsichtlich dieses Minimums der Grenzkosten bei:

$$K(x) = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 8x + 8$$
$$K'(x) = 1{,}5x^2 - 6x + 8$$
$$K''(x) = 3x - 6$$

die folgende Gleichung:

$$K''(x) = 0$$
$$3x - 6 = 0$$
$$3x = 6$$
$$x = 2$$

Das Minimum gibt damit an, dass bei der Ausbringungsmenge $x_{mg} = 2$ ME die Gesamtkosten am geringsten steigen.

IX. Während wir bisher die Situation eines Unternehmens in einem Polypol eines vollkommenen Marktes beschrieben haben, soll nun die Unternehmung die Stellung eines Monopolisten am Markt einnehmen (Angebotsmonopol). Die Erlösfunktion (als Parabel) ist nun:

$$E^*(x) = -3x^2 + 32x$$

bei unveränderten Gesamtkosten:

$$K(x) = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 8x + 8.$$

Nutzenschwelle x = 3,3 ME und Nutzengrenze x = 6,75 ME sind aus der Gleichung

$$E^*(x) = K(x)$$

zu bestimmen, die Gewinnfunktion G(x) ist: $G(x) = E^*(x) - K(x)$, also:

$$G(x) = -0{,}5x^3 + 24x - 8$$

mit:

$$G'(x) = -1{,}5x^2 + 24$$
$$G''(x) = -3x$$

als Ableitungen. Zur Ermittlung des Gewinnmaximums ist wieder die 1. Ableitung gleich 0 zu setzen, also:

$$G'(x) = 0$$
$$-1{,}5x^2 + 24 = 0$$
$$24 = 1{,}5x^2$$
$$x^2 = 16$$
$$x = \pm 4$$

Hier ist x = 4 ME die Lösung wegen $G''(4) = -12 < 0$ (Maximum) und mit G(4) = 56 GE.
Der Erlös des Unternehmens beträgt bei der gewinnmaximalen Ausbringungsmenge x = 4 ME: E*(4) = 80 GE. Der Verkaufspreis p* ergibt sich als:

$$p^* = E^*(x)/x$$

und mithin als: p* = 80/4 = 20 GE. Der Verkaufspreis liegt also beträchtlich höher als p = 8 GE in der weiter oben dargestellten Polypolsituation des Unternehmens.

Aufgabenblatt: Erlös-, Kostenfunktionen

1. Eine quadratische Kostenfunktion eines Unternehmens hat die Form $K(x) = ax^2+bx+c$ mit x als Ausbringungsmenge (ME, Mengeneinheiten). Die Fixkosten betragen 80 GE (Geldeinheiten), die Gesamtkosten betragen bei 4 ME 104 GE, die variablen Kosten bei 10 ME 120 GE.

a) Bestimme die Gleichung der Kostenfunktion K(x).
b) Zeige, dass mit steigender Ausbringungsmenge auch die Kosten steigen.
c) Bestimme die langfristige Preisuntergrenze für das Produkt, das das Unternehmen an den Markt bringt (Betriebsoptimum).

2. Die Gesamtkosten K eines Unternehmens stellen in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x (ZME, Zehntausend Mengeneinheiten) eine ganz rationale Funktion 3. Grades dar. Dabei betragen die Fixkosten 200 TGE (Tausend Geldeinheiten), die Grenzkosten sind bei 2 ZME 14 TGE/ZME hoch, der minimale Kostenzuwachs liegt bei 5 ZME vor, die Produktionskosten betragen schließlich bei 3 ZME 254 TGE.

a) Bestimme die Gleichung der Kostenfunktion K(x).
b) Bestimme die Produktionskosten bei 4 ZME und bei 8 ZME. Um wie viel Prozent sind die variablen Stückkosten bei 10 ZME höher als bei 6 ZME?
c) Bestimme die langfristige und kurzfristige Preisuntergrenze für das Produkt, das das Unternehmen an den Markt bringt (Betriebsoptimum, Betriebsminimum).

3. Ein Unternehmen in einem Polypol eines vollkommenen Marktes hat als von einer Ausbringungsmenge x (ME, Mengeneinheiten) abhängige Erlös- und Gesamtkostenfunktion:

$$E(x) = 41x \text{ (GE, Geldeinheiten)}$$

$$K(x) = x^3 - 4x^2 + 12x + 32 \text{ (GE).}$$

a) Bestimme die Fix- und variablen (Stück-) Kosten aus der Gesamtkostenkurve. Wie hoch sind die Stückkosten bei einer Ausbringungsmenge von 4 ME, wie hoch ist der Marktpreis des vom Unternehmen angebotenen Produkts?
b) Bestimme die kurzfristige Preisuntergrenze durch Gleichsetzen von Grenzkosten und variablen Stückkosten. Wie hoch ist im Betriebsminimum der Verlust des Unternehmens?
c) Bestimme die Gewinnfunktion, die Gewinnzone (Nutzenschwelle, Nutzengrenze) und das Gewinnmaximum mit dem maximalen Gewinn.

4. Ein Unternehmen in einem Polypol eines vollkommenen Marktes hat als von einer Ausbringungsmenge x (ME, Mengeneinheiten) abhängige Erlös- und Gesamtkostenfunktion:

$$E(x) = 360x \text{ (GE, Geldeinheiten)}$$

$$K(x) = \frac{1}{8}x^3 - 15x^2 + 600x + 2000 \text{ (GE).}$$

a) Bestimme die Ausbringungsmenge mit minimalem Kostenzuwachs.
b) Bestimme die Gewinnfunktion, die Gewinnzone (Nutzenschwelle, Nutzengrenze) und das Gewinnmaximum mit dem maximalen Gewinn.

5. Ein Unternehmen ist ein Monopolist am Markt und unterliegt für sein Produkt der Preis-Absatz-Funktion p(x) = 40–0,5x (Ausbringungsmenge x in ME, Mengeneinheiten; Preis p in GE, Geldeinheiten). Weiter wird die Produktion des Unternehmens bestimmt durch die Gesamtkosten

$$K(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}2x^2 + 1{,}8x + 180 \text{ (GE).}$$

a) Wie lauten Erlösfunktion und Erlösmaximum? Wie hoch ist der Angebotspreis im Erlösmaximum?
b) Berechne die Gewinnzone, die gewinnmaximale Ausbringungsmenge und den maximalen Gewinn.
c) Wie ändert sich die Gewinnzone, wenn statt der kubischen eine lineare Kostenfunktion mit 174 GE an Fixkosten und 8 GE an variablen Stückkosten angenommen wird? Wo liegt dann das Erlös-, wo das Gewinnmaximum? Wie hoch ist der maximale Gewinn? Wie hoch ist der Angebotspreis im Gewinnmaximum (Cournotscher Punkt)?

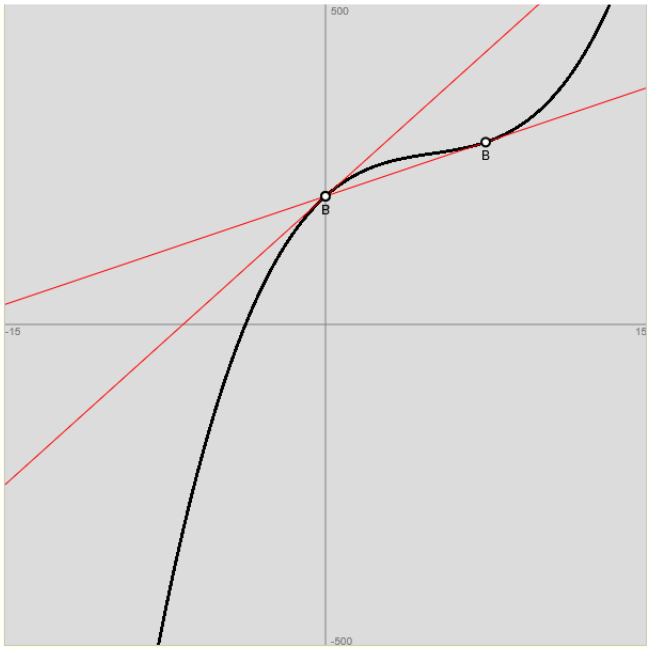
Lösungen: 1.a) $K(x) = ax^2+bx+c$, K(0) = 80, K(4) = 104, K(10) = 120+80 = 200 => a=1, b=2, c=80 => Kostenfunktion $K(x) = x^2+2x+80$; b) K'(x) = 2x+2 > 0 für Ausbringungsmengen x≥0 => K(x) monoton steigend;
c) langfristige Preisuntergrenze: Tangente von O(0|0) an K(x) => Tangente t: y = 19,9x, Berührpunkt B(8,95|178), langfristige Preisuntergrenze p_{lf} = 19,9 GE.

2.a) $K(x) = ax^3+bx^2+cx+d$, K'(x) = $3ax^2+2bx+c$, K''(x) = 6ax+2b, K(0) = 200, K'(2) = 14, K''(5) = 0 (Wendepunkt als Punkt minimalen Kostenzuwachses), K(3) = 254 -> lineares Gleichungssystem:

d = 200, 12a+4b+c = 14, 30a+2b = 0, 27a+9b+3c+d = 254 => 27a+9b+3c = 54

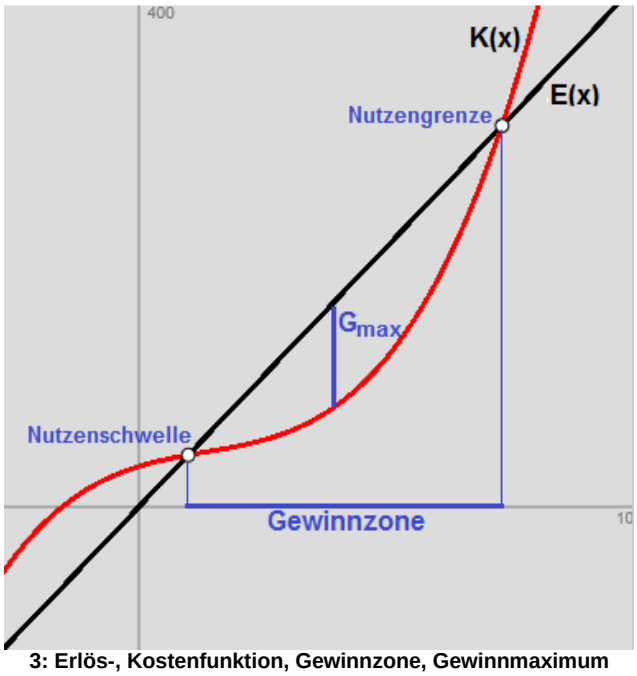
Lösungen: a=1/3, b=-5, c=30, d=200 => Kostenfunktion $K(x) = x^3/3-5x^2+30x+100$; b) K(4) = 261,33 TGE, K(8) = 290,67 TGE, $K_{var}(x) = x^3/3-5x^2+30x$, $k_{var}(x) = x^2/3-5x+30$ -> $k_{var}(10)/k_{var}(6)$ = 13,33/12 = 1,111 => Prozentsatz = +11,1%; c) langfristige Preisuntergrenze: Tangente von O(0|0) an K(x) => Tangente t: y = 33,3x, Berührpunkt B(33,3|343,5), langfristige Preisuntergrenze p_{lf} =33,3 TGE; kurzfristige Preisuntergrenze: Tangente von P(0|200) an K(x) => Tangente t: y = 11,25x+200, Berührpunkt B(7,5|284,4), kurzfristige Preisuntergrenze p_{kf} =11,25 TGE (Abb.1, 2)

1: Langfristige Preisuntergrenze

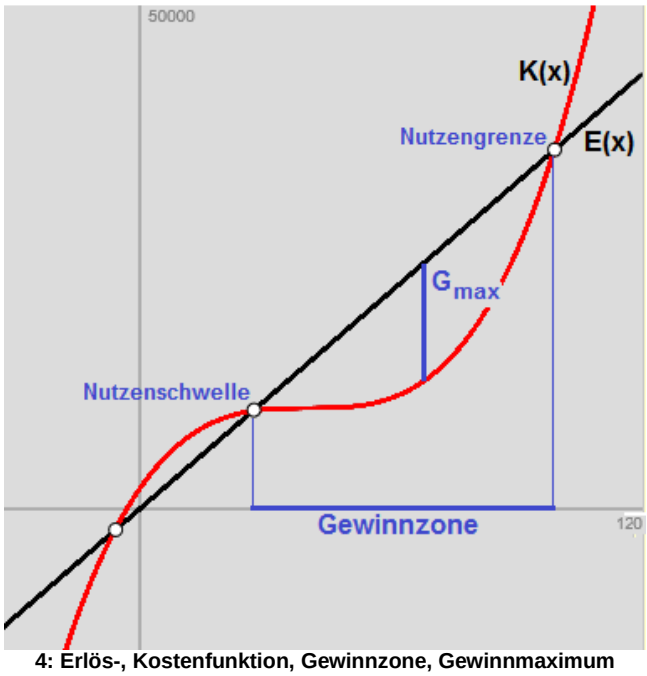


2: Kurzfristige Preisuntergrenze

3.a) Gesamtkosten: $K(x) = 32 + (x^3 - 4x^2 + 12x) = 32 + x(x^2 - 4x + 12) = K_{fix} + xk_{var}(x)$, Stückkosten: $k(x) = k_{fix} + k_{var} = \frac{K_{fix}}{x} + \frac{K_{var}}{x} = \frac{K_{ges}}{x} = \frac{32}{x} + x^2 - 4x + 12$ => k(4) = 20 GE, Marktpreis: p = 41 GE; b) p_{kf} = $k_{var}(2)$ = 8 GE; c) $G(x) = E(x) - K(x) = -x^3 + 4x^2 + 29x - 32$, G(x) = 0 -> Nutzenschwelle: x=1 ME, Nutzengrenze: x=7,4 ME, G'(x) = 0 -> Gewinnmaximum: x=4,7 ME -> G(4,7) = 88,84 GE (Abb.3).



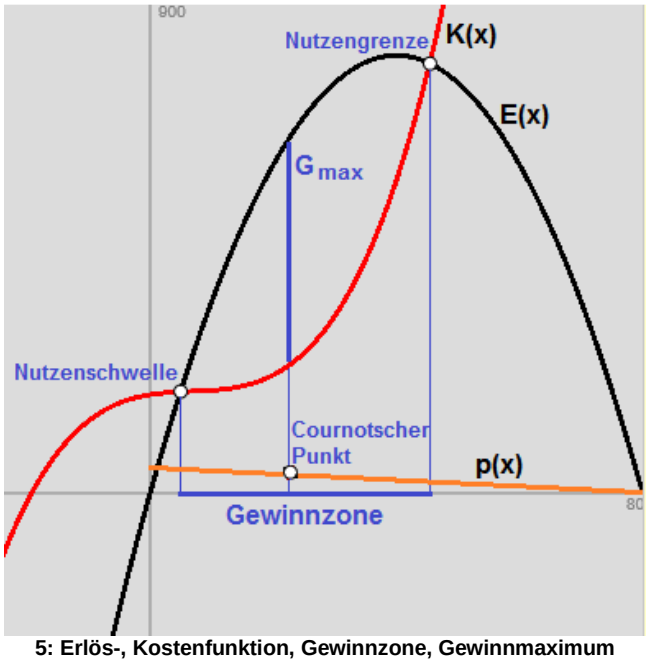
3: Erlös-, Kostenfunktion, Gewinnzone, Gewinnmaximum



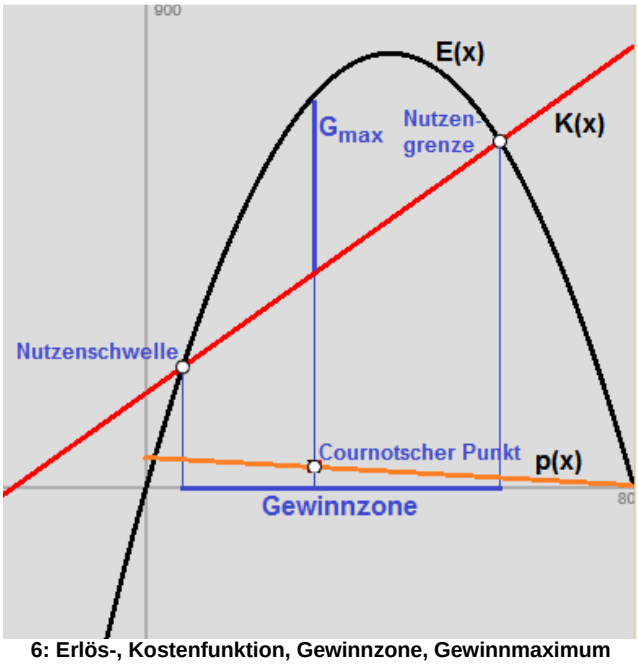
4: Erlös-, Kostenfunktion, Gewinnzone, Gewinnmaximum

4.a) K''(x) = 0 -> x=40 ME; b) $G(x) = -\frac{1}{8}x^3 + 15x^2 - 240x - 2000$, G(x) = 0 -> Nutzenschwelle: x=27 ME, Nutzengrenze: x=98,9 ME, G'(x) = 0 -> Gewinnmaximum: x=71 ME -> G(71) = 11836,13 (Abb.4).

5.a) Erlösfunktion: E(x) = p(x)·x = (40-0,5x)x = 40x–0,5x^2, E'(x) = 40-x = 0 => x = 40 ME als Erlösmaximum mit E(40) = 800 GE, p(40) = 20 GE; b) G(x) = E(x)–K(x) = -0,01x^3-0,3x^2+38,2x-180 = 0 -> Nutzenschwelle: x=4,95 ME, Nutzengrenze: x=45,45 ME, G'(x) = -0,03x^2-0,6x+38,2 = 0 -> Gewinnmaximum: x=27,06 ME -> G(27,06) = 435,87 GE; c) K(x) = 8x+174, E(x) = K(x) -> Nutzenschwelle: x=6 ME, Nutzengrenze: x=56 ME, G(x) = E(x)–K(x) = -0,5x^2+32x–174, G'(x) = 0 -> Gewinnmaximum: x=32 ME -> G(32) = 338 GE, Angebotspreis: p(32) = 24 GE, Erlösmaximum: x=40 ME (Abb.5, 6).



5: Erlös-, Kostenfunktion, Gewinnzone, Gewinnmaximum



6: Erlös-, Kostenfunktion, Gewinnzone, Gewinnmaximum

Datenblatt: Lineare Gleichungssysteme I – Gleichsetzen, Einsetzen, Addition

Ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten habe die Form:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \qquad (1)$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \qquad (2)$$

mit den reellen Variablen x_1, x_2, den reellen Koeffizienten a_{11}, … a_{22} und reellen Ergebnissen (rechten Seiten) b_1, b_2. Das lineare Gleichungssystem hat dann entweder keine Lösung, eine Lösung oder unendlich viele Lösungen. Zur Bestimmung der Variablen x_1 und x_2 gilt Folgendes:

Lösen von linearen Gleichungssystemen mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten

Gleichsetzungsverfahren: Beide Gleichungen (1) und (2) werden nach derselben Variablen aufgelöst, die zwei Ausdrücke gleichgesetzt, die daraus entstandene Gleichung nach der anderen Variablen aufgelöst, die Lösung in eine der nach der ersten Variablen aufgelösten Gleichung einsetzen, um die zweite Variable zu errechnen.

Einsetzungsverfahren: Eine Gleichung nach einer Variablen auflösen, Variable in die andere Gleichung einsetzen, Lösung dieser Gleichung ermitteln, Lösung in die Gleichung für die aufgelöste Variable einsetzen.

Additionsverfahren: Hier führt die Addition des Vielfachen einer Gleichung zu der anderen zur Elimination einer Variablen. Die zweite Variable kann bestimmt werden, Einsetzen in eine der Ursprungsgleichungen führt zur Bestimmung der anderen Variablen.

Ein (allgemeines) lineares Gleichungssystem bestehe aus m Gleichungen (durchnummeriert von 1 bis m) und n Unbekannten und habe die Form:

$$a_{11}x_1 + b_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \qquad (1)$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \qquad (2)$$
$$\ldots$$
$$a_{m1}x + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \qquad (m)$$

mit den reellen Variablen x_1, … x_n, den reellen Koeffizienten a_{11}, … a_{mn} und reellen Ergebnissen (rechten Seiten) b_1, … b_m. Sind alle Zahlen b_1, … $b_m = 0$, so heißt das lineare Gleichungssystem homogen, ansonsten inhomogen. Ein Gleichungssystem mit mehr Variablen als Gleichungen (n > m) heißt unterbestimmt, eins mit mehr Gleichungen als Variablen (n < m) überbestimmt. In abgekürzter tabellarischer Darstellung (Matrixdarstellung) lautet das lineare Gleichungssystem in der Form der durch die rechte Seite erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & & & & \ldots \\ a_{mn} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Im Falle einer beliebigen Anzahl von m Gleichungen und n Unbekannten gilt hinsichtlich des Gauß-Algorithmus zur Lösung des Gleichungssystems die folgende Vorgehensweise:

Lösen von linearen Gleichungssystemen (Gauß-Algorithmus)

1) Das lineare Gleichungssystem aus Gleichungen und Unbekannten wird in Matrixdarstellung umgeschrieben; eine Gleichung entspricht eine Zeile, einer Unbekannten einer Spalte in der Matrix, die rechte (Zahlen-) Seite des Gleichungssystems bildet die letzte Spalte der Matrix; die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten kann auch verschieden sein. 2) Beim Gaußschen Algorithmus werden, beginnend vom Anfangstableau, Nullen unter der Hauptdiagonalen wie folgt erzeugt: 1. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 1. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 2; ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 2, so werden alle Matrixelemente in Zeile 2 mit a multipliziert, alle Matrixelemente in Zeile 1 mit b multipliziert und Produkt minus Produkt als neue Matrixelemente der Zeile 2 gebildet (Vorgehensweise (*), auch unter Beachtung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen a und b). Ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*) usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 2. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 2. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 3; ist a das zweite Element in Zeile 2 und b das zweite Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*), und dies weiter für Zeile 4 usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 3. Schritt usw., bis die letzte Matrixspalte erreicht ist. Es entsteht dadurch das Endtableau des Algorithmus, das auf die Art der Lösungen und die Lösungen des linearen Gleichungssystems hinweist gemäß den folgenden Fällen:

Fall I – eindeutige Lösung: 3/I) Ist im Endtableau des Gaußschen Algorithmus die Dreiecksgestalt (Stufenform) gegeben, so gilt für die Variable z der letzten Spalte mit dem dazugehörenden Matrixelement $a \neq 0$ und dem Element b der rechten Seite: $az = b \Leftrightarrow z = b/a$. / Für die Variable y der vorletzten Spalte mit dem dazugehörenden Matrixelement $c \neq 0$, dem Matrixelement d und dem Element e der rechten Seite gilt: $cy+dz = e \Leftrightarrow cy = e - db/a \Leftrightarrow y = e/c - db/(ac)$ / usw., bis die Variable der ersten Matrixspalte errechnet ist. 4/I) Die Lösungsmenge besteht in diesem Fall – wegen der Eindeutigkeit der Lösung – aus einem Zahlentupel, also: **L** = {(l|m|…|t)} mit reellen Zahlen l, m, … t.

Fall II – keine Lösung: 3/II) Das Endtableau enthält im Bereich der linken Seite eine Nullzeile, während die damit korrespondierende rechte Seite ein Element $f \neq 0$ ist. 4/II) Wir erhalten also die Gleichung: $0 = f \neq 0$ und damit einen Widerspruch. Das lineare Gleichungssystem besitzt keine Lösung: **L** = { }.

Fall III – mehrdeutige Lösung: 3/III) Das Endtableau enthält im Bereich der linken Seite eine Nullzeile, während die dazugehörige rechte Seite ebenfalls ein Element = 0 enthält. 4/III) Wir erhalten eine mehrdeutige Lösung, indem wir die Variable z, dessen Diagonalelement =0 ist, gleich einem reellen Parameter r setzen. Die Lösungsmenge ist dann vom Typ **L** = {(l(r)|m(r)|…|t(r))| rε**R**} mit linearen, von r abhängigen Funktionen $l(r) = l_1r + l_2$, $m(r) = m_1r + m_2$, …, $t(r) = t_1r + t_2$. Bei mehreren Nullzeilen des Endtableaus sind auch entsprechend viele Variablen gleich Parametern r, s, … zu setzen, die Komponenten der Lösungsmenge sind Linearkombinationen der Parameter r, s, …

Beispiele (lineare Gleichungssysteme):

a) 2 Unbekannte, 3 Gleichungen:

Lineares Gleichungssystem:

$+ 1x_1 + 2x_2 = 4$

$+ 2x_1 - 1x_2 = 3$

$- 1x_1 + 1x_2 = -1$

Anfangstableau:

x_1 x_2 | *R.S.*

1 2 | 4

2 -1 | 3

-1 1 | -1

1. Schritt: 1*(*2*) - 2*(*1*) / 1*(*3*) + 1*(*1*) /

1 2 | 4

0 -5 | -5

0 3 | 3

2. Schritt: 5*(*1*) + 2*(*2*) / 5*(*3*) + 3*(*2*) /

5 0 | 10

0 -5 | -5

0 0 | 0

Teilen: (*1*):5 / (*2*):(-5) /

1 0 | 2

0 1 | 1

0 0 | 0

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$+ 1x_1 = 2$

$+ 1x_2 = 1$

$0 = 0$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_1 = 2$
$x_2 = 1$

-> eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems

b) 3 Unbekannte, 3 Gleichungen:

Lineares Gleichungssystem:

$+ 2x - 2y - 1z = 5$

$+ 5x + 10y + 2z = -4$

$- 7x + 3y + 8z = 4$

Anfangstableau:

2 -2 -1 | 5

5 10 2 | -4

-7 3 8 | 4

1. Schritt: 2*(*2*) - 5*(*1*) / 2*(*3*) + 7*(*1*)

2 -2 -1 | 5

0 30 9 | -33

0 -8 9 | 43

2. Schritt: 15*(*3*) + 4*(*2*)

2 -2 -1 | 5

0 30 9 | -33

0 0 171 | 513

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$+ 2x - 2y - 1z = 5$

$+ 30y + 9z = -33$

$+ 171z = 513$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$z = 3$
$y = -2$
$x = 2$

c) 3 Unbekannte, 2 Gleichungen:

Lineares Gleichungssystem:

$+ 1x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1$

$- 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 0$

Anfangstableau:

x_1 x_2 x_3 | *R.S.*

1 2 -2 | 1

-2 1 1 | 0

1. Schritt: 1*(*2*) + 2*(*1*) /

1 2 -2 | 1

0 5 -3 | 2

2. Schritt: 5*(*1*) - 2*(*2*) /

5 0 -4 | 1

0 5 -3 | 2

Teilen: (*1*):5 / (*2*):5 /

1 0 -0.8 | 0.2

0 1 -0.6 | 0.4

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$+ 1x_1 - 0.8x_3 = 0.2$

$+ 1x_2 - 0.6x_3 = 0.4$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_3 = t$
$x_1 = 0.2 + 0.8t$
$x_2 = 0.4 + 0.6t$

-> unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems; Parameter ist/sind die reelle(n) Zahl(en) t

d) 3 Unbekannte, 3 Gleichungen:

Lineares Gleichungssystem:

$+ 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 3$

$- 1x_1 + 4x_3 = 7$

$+ 1x_2 + 9x_3 = 17$

Anfangstableau:

x_1 x_2 x_3 | *R.S.*

2 1 1 | 3

-1 0 4 | 7

0 1 9 | 17

1. Schritt: 2*(*2*) + 1*(*1*) /

2 1 1 | 3

0 1 9 | 17

0 1 9 | 17

2. Schritt: 1*(*1*) - 1*(*2*) / 1*(*3*) - 1*(*2*) /

2 0 -8 | -14

0 1 9 | 17

0 0 0 | 0

Teilen: (*1*):2 /

1 0 -4 | -7

0 1 9 | 17

0 0 0 | 0

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$+ 1x_1 - 4x_3 = -7$

$+ 1x_2 + 9x_3 = 17$

$0 = 0$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_3 = t$
$x_1 = -7 + 4t$
$x_2 = 17 - 9t$

-> unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems; Parameter ist/sind die reelle(n) Zahl(en) t

Aufgabenblatt: Lineare Gleichungssysteme

1. Löse die folgenden linearen Gleichungssysteme:

a)
$$\begin{aligned} -2x - 7y &= 6 \\ +10x + z &= 0 \\ +4y - z &= 1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} +2x - 2y - z &= 5 \\ +5x + 10y + 2z &= -4 \\ -7x + 3y + 8z &= 4 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} +3a + b - 2c &= -50 \\ -6a + 2b - 3c &= 60 \\ -8a + 3b - c &= 306 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} +2x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 1x_2 + 5x_3 &= 6 \\ +1x_1 + 4x_2 - 1x_3 &= -9 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} +1x_1 - 1x_2 + 6x_3 &= 7 \\ +3x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 3 \\ -1x_1 + 3x_2 + 8x_3 &= 11 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} +2x_1 + 6x_3 &= 0 \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ +4x_1 - 2x_2 - 1x_3 &= 0 \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} +2a - b + c + 4d &= 3 \\ +3a + 2b - c + 3d &= 2 \\ +4a + 3b - 3c + 6d &= 1 \\ -5a + 7b + 5c - d &= 0 \end{aligned}$$

2. Bestimme die Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme in Matrixdarstellung:

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -4 & 67 \\ 2 & -3 & 38 \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{cc|c} -6 & 9 & 24 \\ 12 & -18 & -48 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & -9 \\ 1 & 3 & 4 & 12 \end{array}\right)$

d) $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 76 \\ 3 & 5 & -104 \\ 2 & 1 & -4 \end{array}\right)$

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 12 \\ 5 & -4 & -2 & -11 \\ 8 & -7 & 4 & 10 \end{array}\right)$

f) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & 0 & -1 & 15 \end{array}\right)$

g) $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -18 & 6 & 700 \\ 12 & 20 & -3 & 1680 \\ 2 & -9 & 11 & 280 \end{array}\right)$

h) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -4 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$

<u>Lösungen</u>: 1. x, y, z =, x_1, x_2, x_3 = bzw. a, b. c, d = 1a) 0,5; -1; -5 / 1b) 2; -2; 3 / 1c) -8; 102; 64 / 1d) 1; -2; 2 / 1e) 16-13t; 9-7t; t / 1f) -3t; -6,5t; t / 1g) 1; 0; 1; 0 (reeller Parameter t).
2. x_1, x_2 =, x_1, x_2, x_3 = bzw. x_1, x_2, x_3, x_4 = 2a) 7; -8 / 2b) -4+1,5t; t / 2c) 1-3t; 11/3-t/3; t / 2d) 12; -28 / 2e) 1; 2; 4 / 2f) 7,5+0,5t; -2,5+0,5t; t / 2g) 140; 0; 0 / 2h) –t; -3t; -3t; t (reeller Parameter t).

Datenblatt: Matrizen

Tabellen der Form $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ heißen nxm-Matrizen mit n Zeilen und m Spalten, die die reelle Matrixelemente a_{ij}, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$, enthalten, n-zeilige Matrizen mit einer Spalte heißen Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \end{pmatrix}$. Die Matrix $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ ist die Nullmatrix, die nxn-Matrix $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ Einheitsmatrix.

Eine Matrix wird mit einer reellen Zahl r multipliziert, indem man jedes Matrixelement mit r multipliziert (Skalarmultiplikation). Matrizen mit gleicher Anzahl von Zeilen und Spalten können addiert werden (Matrixaddition), indem die entsprechenden Matrixelemente addiert werden. Zwei Matrizen können miteinander multipliziert werden, wenn die Anzahl der Spalten der linken Matrix A mit der Anzahl der Zeilen der rechten Matrix B übereinstimmt (Matrix C = AB); die Matrixelemente einer Zeile der Matrix A werden mit dem jeweiligen Element einer Spalte der Matrix B multipliziert, die Produkte addiert (Matrixmultiplikation).

Matrixgleichungen sind von der Form AX + B = C o.ä. mit der Lösung $X = A^{-1}(C-B)$ o.ä. (A^{-1} als inverse Matrix zu A).

Für eine quadratische nxn-Matrix A und die nxn-Einheitsmatrix (mit 1 in der Hauptdiagonale und 0 außerhalb) heißt A^{-1} die inverse Matrix, wenn gilt:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E \quad (*) .$$

Voraussetzung für die Existenz der inversen Matrix A^{-1} ist dabei, dass A invertierbar ist, dass somit der Rang von A gleich n ist (rgA = n) oder die Determinante von A ungleich 0 ($\det A \neq 0$). (*) lässt sich dann in Beziehung setzen zum Gleichungssystem

$$A \cdot X = E \quad (**) .$$

(**) besitzt die Lösung $X = A^{-1}$ und führt zudem auf den von linearen Gleichungssystemen her bekannten Gaußschen Algorithmus, hier in einer allgemeineren Form. Aus dem Anfangstableau

linke Seite | rechte Seite

A | E

entsteht dabei durch die üblichen Gauß-Umformungen (Zeilenadditionen zum Erzeugen von Nullen unterhalb und oberhalb der Hauptdiagonalen der Matrix auf der linken Seite, Zeilendivision zur Erzeugung von Einsen in der Hauptdiagonale) das Endtableau:

E | A^{-1}

mit der Lösung $X = A^{-1}$ auf der rechten Seite.

Beispiele (Rechnen mit Matrizen):

a) $4\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 12 & 20 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

d) $-3\begin{pmatrix}10 & 5 & -2\\ 3 & -4 & -9\\ 0 & 3 & 12\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}5 & 8 & 21\\ -3 & 0 & 0\\ 10 & -13 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-20 & 1 & 48\\ -15 & 12 & 27\\ 20 & -35 & -36\end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix}0 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -10 & 2\end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix}1 & -5 & 0\\ 0 & -2 & 3\\ 6 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 5\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-22\\ -16\\ 27\end{pmatrix}$

<u>Beispiel</u> (Matrixgleichung):

$2A^{-1}XA - 4E = A$	$\mid +4E$
$2A^{-1}XA = A + 4E$	$\mid :2$
$A^{-1}XA = 0{,}5A + 2E$	$\mid \cdot A$ (Matrixmultiplikation von links)
$XA = 0{,}5A^2 + 2A$	$\mid \cdot A^{-1}$ (Matrixmultiplikation von rechts)
$X = 0{,}5A + 2E$	

(mit invertierbarer Matrix A, Einheitsmatrix E; Auflösen der Gleichung nach Matrix X)

<u>Beispiel</u> (Matrixinversion):

Die Inverse zu $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ist zu bestimmen. <u>Lösung</u>:

A			E			
1	1	2	1	0	0	
0	2	1	0	1	0	
2	0	1	0	0	1	III – 2·I
1	1	2	1	0	0	
0	2	1	0	1	0	
0	-2	-3	-2	0	1	III + II
1	1	2	1	0	0	I + III
0	2	1	0	1	0	2·II + III
0	0	-2	-2	1	1	
1	1	0	-1	1	1	4·I – II
0	4	0	-2	3	1	
0	0	-2	-2	1	1	
4	0	0	-2	1	3	:4
0	4	0	-2	3	1	:4
0	0	-2	-2	1	1	:(-2)
1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	
0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	
0	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
E			A^{-1}			

Die inverse Matrix zu A lautet also: $A^{-1} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Aufgabenblatt: Matrizen

1. Berechne.

a) $2\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2\\3\\8\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}0\\11\\2\end{pmatrix}=$

b) $\begin{pmatrix}5&0\\-2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1&2\\6&0&-5\end{pmatrix}=$

c) $\begin{pmatrix}3&5&-3\\6&-8&10\\2&-7&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}12\\0\\-9\end{pmatrix}=$

d) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-4\\-3&0\end{pmatrix}+\frac{5}{4}\begin{pmatrix}-1&0\\0&-3\end{pmatrix}=$

e) $\begin{pmatrix}0{,}2&0{,}5&0{,}3\\0{,}6&0{,}1&0{,}2\\0{,}2&0{,}4&0{,}5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}220\\100\\480\end{pmatrix}=$

f) $\begin{pmatrix}2&-5&0\\-4&-2&0\\4&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&2\\3&-4\\-2&3\end{pmatrix}=$

2. Bilde die inverse Matrix.

a) $\begin{pmatrix}4&-1\\-2&3\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}8&12\\-3&15\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}2&-1&-4\\4&-1&3\\-2&0&-2\end{pmatrix}$

3. Löse in den folgenden Matrixgleichungen nach X auf.

a) AX = B + 3X

b) AX – 2B = BX – 3C

c) AX + 4E = (A-2E)X

d) $XA^{-1} = A + XA$

e) 6X – XA = X(4E+A)

f) $B^{-1}XB + A = B^{-1}$

g) $\begin{pmatrix}2&4\\-3&0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&3\\5&-2\end{pmatrix}$

h) $2\begin{pmatrix}3&0&-2\\1&5&0\\-5&-4&1\end{pmatrix}+4X=5\begin{pmatrix}2&4&0\\1&1&0\\-3&4&-5\end{pmatrix}+2X$

(mit invertierbaren Matrizen A, B, C und E als Einheitsmatrix).

4. Löse mit E als Einheitsmatrix und den quadratischen Matrizen A, B, X gleicher Zeilen- und Spaltenzahl die nachstehende Matrizengleichung nach X auf:

A(X+2E) = B + 2A – 3X

Berechne X, wenn A = $\begin{pmatrix}-2&1&2\\0&-1&1\\2&0&-2\end{pmatrix}$ und B = $\begin{pmatrix}4&0&-5\\1&-4&0\\2&-3&6\end{pmatrix}$ gilt.

5.a) Für die Matrizen A = $\begin{pmatrix} 1 & a \\ -3 & 4 \\ 5 & b \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} c & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ und C = $\begin{pmatrix} -7 & d \\ 15 & e \\ f & -34 \end{pmatrix}$ gelte:

$$A \cdot B = C.$$

Bestimme rechnerisch die Zahlen a bis f.

b) Löse für B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -0{,}5 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2{,}5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und C = $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$ die Gleichung

$$BX = (E-B)X + C$$

nach der Matrix X auf.

<u>Lösungen</u>: 1.a) $\begin{pmatrix} 8 \\ -41 \\ 6 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 10 & -5 & 10 \\ 20 & 2 & -24 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 63 \\ -18 \\ 33 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} -1/4 & -2 \\ -1{,}5 & -15/4 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 238 \\ 238 \\ 324 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} -7 & 24 \\ -22 & 0 \\ 18 & 5 \end{pmatrix}$

2.a) $\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 5/52 & -1/13 \\ 1/52 & 2/39 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}2 & -0{,}7 \\ 0{,}2 & -1{,}2 & -2{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$

3.a) $X = (A-3E)^{-1}B$; b) $X = (A-B)^{-1}(B-3C)$; c) $X = -2E$; d) $X = A(A^{-1}-A)^{-1}$; e) $X = 0$ (Nullmatrix); f) $X = B^{-1}-A$;

g) X = $\begin{pmatrix} -5/3 & 2/3 \\ 13/12 & 5/12 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 2 & 10 & 2 \\ 1{,}5 & -2{,}5 & 0 \\ -2{,}5 & 14 & -13{,}5 \end{pmatrix}$

4. Gleichungsumformungen -> $(A+3E)X = B$ -> $X = (A+3E)^{-1}B$ (falls invertierbar) ->

X = $\begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}75 \\ -0{,}5 & 0{,}75 & 0{,}25 \\ 1 & -0{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 1 & -4 & 0 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}25 & -3{,}25 & 7 \\ -0{,}75 & -3{,}75 & 4 \\ 2{,}5 & 3{,}5 & -8 \end{pmatrix}$

5. a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 15 & -22 \\ 23 & -34 \end{pmatrix}$; b) $(2B-E)X = C$ -> X = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Datenblatt: Produktionsmatrizen

Produktionsmatrizen treten auf in (industriellen) Produktionsvorgängen, wo von Rohstoffen über Zwischenprodukten Fertigprodukte hergestellt werden. Ist $\vec{r}$ der Vektor von (k) Rohstoffen, $\vec{z}$ der (m) Zwischenprodukte und $\vec{p}$ der (n) Endprodukte. Die Matrix A transformiert dann die Rohstoffe in Zwischenprodukte, die Matrix B die Zwischenprodukte in Endprodukte, die Produktionsmatrix C die Rohstoffe in Endprodukte. Die Produktionsvorgänge können dann mit Kostenvektoren $\vec{k}_r$, $\vec{k}_z$ und $\vec{k}_p$ bewertet werden, die die Kosten für je eine Einheit Rohstoffe, Zwischenprodukte und Endprodukte angeben. Insgesamt gelten die Matrixgleichungen:

$$C = A \cdot B$$

$$\vec{r} = A \cdot \vec{z}\,,\ \vec{z} = B \cdot \vec{p}\,,\ \vec{r} = C \cdot \vec{p}$$

$K_r = \vec{k}_r \cdot \vec{r}$, $K_z = \vec{k}_z \cdot \vec{z}$, $K_p = \vec{k}_p \cdot \vec{p}$ (Kosten)

$K = K_{fix} + K_r + K_z + K_p$ (Gesamtkosten)

$E = \vec{e} \cdot \vec{p}$ (Erlöse)

$G = E - K$ (Gewinn)

wobei C die Produktionsmatrix, K_r, K_z und K_p die Rohstoff-, Zwischen- und Endproduktkosten, K_{fix} die fixen Kosten, K die Gesamtkosten des Produktionsprozesses sind. E ist der Erlös aus dem Verkauf der Endprodukte, wobei $\vec{e}$ der Vektor der Verkaufspreise ist; G ist der Gewinn. Im Fall der Invertierbarkeit der Matrizen A, B und C gilt noch:

$$\vec{z} = A^{-1} \cdot \vec{r}\,,\ \vec{p} = B^{-1} \cdot \vec{z}\,,\ \vec{p} = C^{-1} \cdot \vec{r}$$

Ansonsten sind nicht mehr eindeutig lösbare lineare Gleichungssysteme zu lösen.

Beispiel (Produktionsmatrizen):

Für zwei Rohstoffe R, drei Zwischenprodukte Z und zwei Endprodukte E gelten die Produktionsbeziehungen:

A	Z1	Z2	Z3
R1	1	2	0
R2	1	1	1

B	E1	E2
Z1	1	0
Z2	1	1
Z3	2	1

a) Produziert werden sollen die Endprodukte E1 und E2 in den Mengen 200 bzw. 250. An Zwischenprodukten werden dafür benötigt: $\vec{z} = B \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 450 \\ 650 \end{pmatrix}$ und damit die Mengen: Z1: 200, Z2: 450, Z3: 650. An Rohstoffen werden benötigt: $\vec{r} = A \cdot \vec{z} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 450 \\ 650 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1100 \\ 1300 \end{pmatrix}$ und damit die Mengen: R1: 1100, R2: 1300.

b) Im Fall der Produktion von 300 Einheiten E1 und 500 Einheiten E2 werden an Rohstoffen benötigt vermö-

ge der Matrix: $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$: $\vec{r} = C \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1900 \\ 2200 \end{pmatrix}$ und damit an Mengen: R1: 1900, R2: 2200.

c) An Rohstoffen sind folgende Mengen vorhanden: R1: 260, R2: 300. Dann können an Endprodukten hergestellt werden: $\vec{p} = C^{-1} \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 260 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & \frac{-3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 260 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 70 \end{pmatrix}$, also: E1: 40, E2: 70.

d) Im Fall der Produktion von 200 Einheiten E1 und 250 Einheiten E2 (siehe a)) entstehen für die Rohstoffe R1: 1100 und R2: 1300 an Kosten: $K_r = \vec{k}_r \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1100 \\ 1300 \end{pmatrix} = 3300 + 3900 = 7200$, wenn R1 pro Mengeneinheit € 3,-, R2 pro Mengeneinheit € 2,- kostet. Bei Mengeneinheitskosten von € 1,- für Z1, € 2,- für Z2 und € 3,- für Z3 entstehen an Kosten für die Zwischenprodukte mit den Mengen Z1: 200, Z2: 450, Z3: 650: $K_z = \vec{k}_z \cdot \vec{z} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 450 \\ 650 \end{pmatrix} = 200 + 900 + 1950 = 2650$. Bei Mengeneinheitskosten von € 10,- für E1 und € 15,- für E2 entstehen an Kosten: $K_p = \vec{k}_p \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 10 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 250 \end{pmatrix} = 2000 + 3750 = 5750$ für die Endprodukte z.B. bei Verpackung und Transport. Fixe Kosten K_{fix} sollen € 3000,- betragen, so dass sich als Gesamtkosten ergeben: $K = K_{fix} + K_r + K_z + K_p = 3000 + 7200 + 2650 + 5750 = 18600$,- €.

Aufgabenblatt: Produktionsmatrizen

1. Ein Unternehmen produziert aus den Rohstoffen R1, R2, R3 über die Zwischenprodukte Z1, Z2 ein Endprodukt E vermöge der Produktionsbeziehungen:

A	Z1	Z2
R1	2	1
R2	1	3
R3	2	2

B	E
Z1	5
Z2	4

Der Marktpreis für das Endprodukt beträgt 350 GE (Geldeinheiten), die Fixkosten betragen 2400 GE, an Kosten entstehen dem Unternehmen für Rohstoffe, Zwischenprodukte und das Endprodukt (Auslieferung, Verpackung) (GE/ME, Mengeneinheiten):

Pr.	R1	R2	R3	Z1	Z2	E
K	4	8	2	10	5	12

a) Wie lautet des Produktionsprogramm für einen Auftrag für 80 Endprodukte E? Wie groß sind die Kosten, wie groß der Gewinn bei diesem Auftrag?
b) Das Unternehmen nimmt einen Zusatzauftrag für 15 Endprodukte E an. Wie weit kann es dem Auftraggeber im Preis entgegenkommen, wenn es auf zusätzlichen Gewinn verzichtet?
c) Pro Zeiteinheit kann das Unternehmen maximal 200 Endprodukte E herstellen. Wie lauten unter der Bedingung des Marktpreises die Erlös-, wie die Gesamtkostenfunktion der Produktion? Bei welcher Ausbringungsmenge hat das Unternehmen die Gewinnzone erreicht, bei welcher Menge ist der Unternehmensgewinn maximal und wie hoch ist dieser?

2. Gegeben sind die Rohstoffe R1, R2, R3, die Zwischenprodukte Z1, Z2, Z3 und die Endprodukte E1, E2, E3 und deren Produktionsbeziehungen untereinander:

A	Z1	Z2	Z3
R1	0	1	1
R2	1	2	0
R3	1	0	1

B	E1	E2	E3
Z1	1	1	1
Z2	0	0	1
Z3	1	2	1

a) Wie lautet die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C?
b) Wie viel Rohstoffe und Zwischenprodukte muss man einsetzen, um die Endproduktmengen E1: 100, E2: 150, E3: 250 (ME, Mengeneinheiten) herzustellen?
c) Welche Kosten fallen jeweils bei den Endproduktmengen E1: 100, E2: 150, E3: 250 an, wenn folgende Fertigungskosten pro Mengeneinheit anfallen: R1: 1, R2: 2, R3: 4, Z1: 5, Z2: 20, Z3: 20, E1: 10, E2: 20, E3: 5 GE (Geldeinheiten).
d) Die Gesamtkosten für die Endproduktmengen E1: 100, E2: 150, E3: 250 errechnen sich aus den Produktionskosten insgesamt und den fixen Kosten in Höhe von 8000 GE. Stelle die Kosten dem Erlös gegenüber, wenn die Verkaufspreise für die Endprodukte E1: 80, E2: 120, E3: 100 GE betragen.
e) An Rohstoffen sind im Lager vorhanden: R1: 200, R2: 160, R3: 300. Wie viel Endprodukte E1, E2, E3 können produziert werden, wenn der Lagerbestand voll aufgebraucht wird? Ermittle die Anzahl der anfallenden Zwischenprodukte Z1, Z2, Z3.
f) Produziert werden die Endprodukte im Verhältnis E1:E2:E3 = 1:2:2, wobei an Rohstoff R1 nur die Menge 450 zur Verfügung steht. Ermittle die jeweilige Endproduktmenge für E1, E2, E3.
g) Produziert werden die Endprodukte im Verhältnis E1:E2:E3 = 1:1:2, wobei die Produktion durch das Verhältnis der Zwischenprodukte Z1:Z2:Z3 = 4:1:5 bei einer Zwischenproduktmenge von Z3 in Höhe von 500 begrenzt ist. Ermittle die jeweilige Endproduktmenge für E1, E2, E3.

h) Es werden 100 Mengeneinheiten E1 produziert und 80 Mengeneinheiten E3. Wie viele Mengeneinheiten von E2 muss man herstellen, damit unter den Bedingungen der oben genannten Rohstoff-, Zwischen- und Endprodukt- sowie fixen Kosten und der angegebenen Verkaufspreise die Gewinnschwelle (G = 0, also: E = K) erreicht wird?
i) Unter den Bedingungen der oben genannten Rohstoff-, Zwischen- und Endprodukt- sowie fixen Kosten soll bei den Verkaufspreisen E1: 90, E2: 120 € der Verkaufspreis von E3 so bestimmt werden, dass ein Gewinn von € 3100,- entsteht. Die produzierten Endproduktmengen sind dabei. E1: 100, E2: 100, E3: 200.
j) Bei der Herstellung des Endprodukts Z2 kann der Anteil a des Rohstoffes R1 variiert werden. Was ergibt ich für a, wenn von den Zwischenprodukten je 20 Einheiten hergestellt werden und von Rohstoffen R1: 80, R2: 60, R3: 40 Mengeneinheiten am Lager sind?

<u>Lösungen</u>: 1.a) A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, C = A·B = $\begin{pmatrix} 14 \\ 17 \\ 18 \end{pmatrix}$ -> Rohstoffe: R1: 1120, R2: 1360, R3: 1440; Zwischenprodukte Z1: 400, Z2: 320 ME, Endprodukt E: 80, Kosten: K = 2400 + 24800 = 27200 GE, Erlös: E = 28000, Gewinn: G = 800; b) Rohstoffe: R1: 210, R2: 255, R3: 270; Zwischenprodukte: Z1: 75, Z2: 60 ME -> K_{var} = 4650 = p·15 = E => p = 310 GE; c) E(x) = 350x, K(x) = 310x+2400, G(x) = E(x)–K(x) = 40x-2400, 0≤x≤200: G(x) = 0 -> Gewinnzone bei x = 60 ME, G(x) maximal bei x = 200 ME mit G(200) = 5600 GE.

2.a) A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, C = A·B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, Inverse: $C^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; b) Rohstoffe: R1: 900, R2: 1000, R3: 1150; Zwischenprodukte: Z1: 500, Z2: 250, Z3: 650 ME; c) Kosten für 100 ME E1: 100 Z1, 100 Z3, 100 R1, 100 R2, 200 R3, K_{E1} = 4600 GE; für 150 ME E2: 150 Z1, 150 Z2, 300 Z3, 450 R1, 450 R2, 450 R3, K_{E2} = 15900 GE; für 250 ME E3: 250 Z1, 250 Z2, 250 Z3, 500 R1, 750 R2, 500 R3, K_{E3} = 16500 GE; d) Gesamtkosten: K_{ges} = 8000 + 4600 + 15900 + 16500 = 45000, Erlös: E = $\begin{pmatrix} 80 & 120 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 250 \end{pmatrix} = 51000$; Gewinn: G = E – K = 6000; e) $\vec{p} = C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 160 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 20 \end{pmatrix}$, also: E1: 40, E2: 60, E3: 20 ME mit: $\vec{z} = B \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 20 \\ 180 \end{pmatrix}$, also: Z1: 120, Z2: 20, Z3: 180 ME; f) $\begin{pmatrix} 450 \\ * \\ * \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x \\ 9x \\ 12x \end{pmatrix}$ mit: 9x = 450 ⇔ x = 50, also: E1: 50, E2: 100, E3: 100 ME; g) $\begin{pmatrix} 400 \\ 100 \\ 500 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} x \\ x \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ x \\ 5x \end{pmatrix}$ mit: 4x = 400 ⇔ x = 100, also: E1: 100, E2: 100, E3: 200 ME; h) $\vec{r} = C \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ x \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 260+2x \\ 340+x \\ 360+3x \end{pmatrix}$, $\vec{z} = B \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ x \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180+x \\ 80 \\ 180+2x \end{pmatrix}$,

Kosten: K = 8000 + (260+2x) + (240+x)·2 + (360+3x)·4 + (180+x)·5 + 80·20 + (180+2x)·20 + 100·10 + 20x + 80·5 = 17680 + 81x, Erlös: E = 100·80 + 120x + 80·100 = 16000 + 120x, Nutzenschwelle (break even point): K = E ⇔ 17680 + 81x = 16000 + 120x ⇔ 1680 = 39x ⇔ x = 43,08 -> bei Menge E2: 44 ME wird die Gewinnzone erreicht; i) Rohstoffe: R1: 700, R2: 800, R3: 900, Zwischenprodukte: Z1: 400, Z2: 200, Z3: 500, Endprodukte E1: 100, E2: 100, E3: 200 ME, Kosten: K = 8000 + 700 + 1600 + 3600 + 2000 + 4000 + 10000 + 1000 + 2000 + 1000 = 33900 GE, Erlös: E = 90·100 + 120·100 + x·200 = 21000 + 200x, Gewinn: G = E – K = 21000 + 200x – 33900 = 200x – 12900 = 3100 ⇔ 200x = 16000 ⇔ x = 80 -> gesuchter Preis: E3: 80 GE;

j) A_1 = $\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, Bestimmungsgleichung: $\begin{pmatrix} 80 \\ 60 \\ 40 \end{pmatrix} = A_1 \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$ mit: 20a + 20 = 80 ⇔ 20a = 60 ⇔ a = 3 als Anteil des Rohstoffes R1 an Z2.

Datenblatt: Übergangsmatrizen

Übergangsmatrizen P markieren Übergangsprozesse, indem sie Verteilungsvektoren $\vec{x}$ wiederholt (rekursiv) das Matrixprodukt $P\vec{x}$ zuordnen. Sind in den Übergangsmatrizen P alle Elemente reelle Zahlen zwischen 0 und 1 und alle Spaltensummen gleich 1, so liegt ein Austauschprozess vor (quadratische stochastische Matrix, Markov-Prozess). Unter der Voraussetzung eines Austauschprozesses ergibt sich eine Abfolge von Verteilungsvektoren $\vec{x}_n$ (n = 0, 1, 2, …) vermöge:

$$\vec{x}_{n+1} = P\vec{x}_n \text{ bzw. } \vec{x}_n = P^n \vec{x}_0$$

wobei $\vec{x}_0$ der Startvektor ist und P^n die n-fache Multiplikation der Matrix P mit sich selbst bedeutet. Unter der Bedingung, dass die Matrix P eine Spalte mit nur positiven Elementen besitzt, ergibt sich für n -> ∞: P^n -> P* mit P* als Grenzmatrix. In dem Fall existiert ein Fixvektor $\vec{x}^*$, der wegen $\vec{x}^* = P\vec{x}^*$ die Gleichgewichtsverteilung (Grenzverteilung) im Endzustand des Austauschprozesses (n -> ∞) angibt. Es gilt zudem für den Fixvektor:

$$\vec{x}^* = P\vec{x}^* \Leftrightarrow (E-P)\vec{x}^* = \vec{0}$$

d.h. der Vektor $\vec{x}^* = \begin{pmatrix} \alpha t \\ \beta t \\ \dots \end{pmatrix}$ ist Lösung eines homogenen linearen Gleichungssystems mit reellem Parameter t, so dass wegen $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \dots \end{pmatrix}$ gilt: $(\alpha+\beta+\dots)t = x_{01}+x_{02}+\dots \Rightarrow t = (x_{01}+x_{02}+\dots)/(\alpha+\beta+\dots)$.

Für die Grenzmatrix P* gilt noch: $\vec{x}^* = P^*\vec{x}_0 = P^*\vec{x}$ mit Startvektor $\vec{x}_0$ oder beliebigem Verteilungsvektor $\vec{x}$, in der Grenzmatrix bestehen die Spalten aus dem Fixvektor $\vec{x}^*$ mit Spaltensumme gleich 1; hier ist: $t = 1/(\alpha+\beta+\dots)$.
Übergangsgraphen (bestehend aus Knoten und Pfaden) veranschaulichen die Übergangsprozesse.

Beispiel (Übergangsmatrizen):

Eine chemische Verbindung existiert im physikalischen Tripelpunkt gleichzeitig in den drei Aggregatzuständen „fest“, „flüssig“, „gasförmig“. Zu Anfang liegt die Verbindung in einer Masse m = 10 kg im festen Aggregatzustand vor. Im Tripelpunkt ändern sich die Aggregatzustände pro Zeiteinheit gemäß der Übergangsmatrix P mit:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} fest \to fest & flüssig \to fest & gasförmig \to fest \\ fest \to flüssig & flüssig \to flüssig & gasförmig \to flüssig \\ fest \to gasförmig & flüssig \to gasförmig & gasförmig \to gasförmig \end{pmatrix}.$$

Der Startvektor als Verteilungsvektor ist: $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Nach einer Zeiteinheit gilt: $\vec{x}_1 = P \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit 6 kg im Aggregatzustand „fest“, 3 kg im Zustand „flüssig“, 1 kg im Zustand „gasförmig“. Wegen $\vec{x}_{n+1} = P\vec{x}_n$ erhal-

ten wir:

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 4{,}6 \\ 3{,}4 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3{,}98 \\ 3{,}54 \\ 2{,}48 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 3{,}698 \\ 3{,}602 \\ 2{,}7 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \vec{x}_5 = \begin{pmatrix} 3{,}5694 \\ 3{,}6302 \\ 2{,}8004 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \vec{x}_6 = \begin{pmatrix} 3{,}5107 \\ 3{,}643 \\ 2{,}8462 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \ldots$$

Der Fixvektor $\vec{x}^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ergibt sich aus dem linearen Gleichungssystem mit den Umformungen:

$$P \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ (Matrixgleichung auflösen)

$0{,}6x_1+0{,}3x_2+0{,}1x_3 = x_1$ | $-x_1$
$0{,}3x_1+0{,}4x_2+0{,}4x_3 = x_2$ | $-x_2$
$0{,}1x_1+0{,}3x_2+0{,}5x_3 = x_3$ | $-x_3$
$-0{,}4x_1+0{,}3x_2+0{,}1x_3 = 0$ | $\cdot 10$
$0{,}3x_1–0{,}6x_2+0{,}4x_3 = 0$ | $\cdot 10$
$0{,}1x_1+0{,}3x_2–0{,}5x_3 = 0$ | $\cdot 10$

$-4x_1+3x_2+1x_3 = 0$
$3x_1–6x_2+4x_3 = 0$
$1x_1+3x_2–5x_3 = 0$,

so dass der Gauß-Algorithmus auf die Lösungen des Gleichungssystems führt:

Anfangstableau:

x_1	x_2	x_3	R.S.
-4	3	1	0
3	-6	4	0
1	3	-5	0

1. Schritt: 4*(*2*) + 3*(*1*) / 4*(*3*) + 1*(*1*) /

-4	3	1	0
0	-15	19	0
0	15	-19	0

2. Schritt: 5*(*1*) + 1*(*2*) / 1*(*3*) + 1*(*2*) /

-20	0	24	0
0	-15	19	0
0	0	0	0

3. Schritt: (keine Umformung) /

-20	0	24	0
0	-15	19	0
0	0	0	0

Teilen: (*1*):(-20) / (*2*):(-15) /

1	0	-1.2	0
0	1	-1.2667	0
0	0	0	0

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

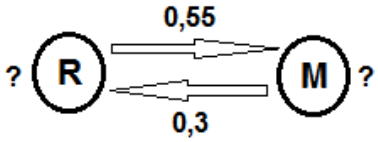
x_3 = t, x_2 = 1.2667t, x_1 = 1.2t.

Mit t = (10+0+0)/(1,2+1,2667+1) = 2,8846 folgt für den Fixvektor: $\vec{x}^* = \begin{pmatrix} 1{,}2 \cdot 2{,}8846 \\ 1{,}2667 \cdot 2{,}8846 \\ 2{,}8846 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}4615 \\ 3{,}6539 \\ 2{,}8846 \end{pmatrix}$, so dass im Endzustand 3,4615 kg der Verbindung fest, 3,6539 kg flüssig und 2,8846 kg gasförmig ist. Mit t = 0,28846 lautet die Grenzmatrix P*:

$$P^* = \begin{pmatrix} 0{,}34615 & 0{,}34615 & 0{,}34615 \\ 0{,}36539 & 0{,}36539 & 0{,}36539 \\ 0{,}28846 & 0{,}28846 & 0{,}28846 \end{pmatrix}.$$

Aufgabenblatt: Übergangsmatrizen

1. Eine Bäckerei führt als neue Produkte zwei Typen von Streuselschnecken ein: mit Rosinen (R) und mit Marzipan (M). Von den Kunden, die jeweils 400 Streuselschnecken in den Filialen der Bäckerei innerhalb einer Woche kaufen, entscheiden sich anfangs 70% für die Variante mit Rosinen. Die Bäckereiangestellten beobachten jedoch einen Wechsel im Kundenverhalten gemäß folgendem Übergangsgraphen:



a) Vervollständige den Übergangsgraphen und stelle die Übergangsmatrix P auf.
b) Berechne für die ersten drei Wochen die Entwicklung im Verhältnis von Rosinen- und Marzipanschnecken.
c) Auf die Herstellung von wie viel Rosinen- bzw. Marzipanschnecken pro Woche muss sich die Bäckerei auf Dauer einstellen?

2. Zur Beschreibung eines Austauschprozesses ist die Übergangsmatrix P mit:

$$P = \begin{pmatrix} a & b & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0{,}2 & c \end{pmatrix}$$

gegeben, weiter die Anfangsverteilung: $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 80 \end{pmatrix}$.

a) Vervollständige die Übergangsmatrix P und berechne die Verteilungen für die Zustände 1 und 2.

b) Bestimme den Fixvektor $\vec{x}^*$ und die Grenzmatrix P* des Austauschprozesses.

3. Im Jahr 2016 waren ungefähr 12 Millionen Menschen im Raum Europa (E), Nordafrika (NA) und Vorderasien (VA) auf der Flucht. Davon befanden sich Anfang 2016 3,3 Millionen in Europa, 2,8 Millionen in Nordafrika, 5,9 Millionen in Vorderasien; 0,4 Millionen gelang die Flucht von Nordafrika, 0,9 Millionen von Vorderasien nach Europa; umgekehrt kehrten von Europa 0,2 Millionen Menschen nach Nordafrika und 0,1 Millionen nach Vorderasien zurück.

a) Ermittle die Übergangsmatrix P.
b) Berechne, wie sich – unter der Voraussetzung der gleichen Anzahl von Migranten – die Flüchtlingsströme im Jahr 2017 entwickeln werden.

<u>Lösungen</u>: 1.a) P = $\begin{pmatrix} 0{,}45 & 0{,}3 \\ 0{,}55 & 0{,}7 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} R \to R & M \to R \\ R \to M & M \to M \end{pmatrix}$; b) $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 280 \\ 120 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 162 \\ 238 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 144{,}3 \\ 255{,}7 \end{pmatrix}$,

$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 141{,}6 \\ 258{,}4 \end{pmatrix}$ -> Anteil R: 70% -> 40,5% -> 36,1% -> 35,4%, Anteil M: 30% -> 59,5% -> 63,9% -> 64,6%;

c) lineares Gleichungssystem: $-0{,}55x_1+0{,}3x_2 = 0$ => $x_1 = t$, $x_2 = 11t/6$ -> 1) t = 141,2 -> $\vec{x}^* = \begin{pmatrix} 141{,}2 \\ 258{,}8 \end{pmatrix}$,

2) t = 0,3529 -> P* = $\begin{pmatrix} 0{,}3529 & 0{,}3529 \\ 0{,}6471 & 0{,}6471 \end{pmatrix}$ -> Anzahl: 141 x R, 259 x M (gerundete Werte)

2.a) P = $\begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ -> $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 84 \\ 128 \\ 168 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 88{,}8 \\ 97{,}6 \\ 193{,}6 \end{pmatrix}$; b) $\vec{x}^* = \begin{pmatrix} 87{,}69 \\ 77{,}95 \\ 214{,}36 \end{pmatrix}$, P* = $\begin{pmatrix} 9/39 & 9/39 & 9/39 \\ 8/39 & 8/39 & 8/39 \\ 22/39 & 22/39 & 22/39 \end{pmatrix}$

3.a) Verflechtungstabelle:

	E	NA	VA	Summe
E	3,0	0,4	0,9	
NA	0,2	2,4	0	
VA	0,1	0	5,0	
				12,0

-> P = $\begin{pmatrix} 10/11 & 1/7 & 9/59 \\ 2/33 & 6/7 & 0 \\ 1/33 & 0 & 50/59 \end{pmatrix}$; b) Stand Ende 2016: E: 3,3+0,4+0,9–0,2–0,1 = 4,3; NA: 2,8–0,4+0,2 = 2,6;

VA: 5,9–0,9+0,1 = 5,1 bzw.: $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 3{,}3 \\ 2{,}8 \\ 5{,}9 \end{pmatrix}$ (Anfang 2016) -> $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 10/11 & 1/7 & 9/59 \\ 2/33 & 6/7 & 0 \\ 1/33 & 0 & 50/59 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3{,}3 \\ 2{,}8 \\ 5{,}9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}3 \\ 2{,}6 \\ 5{,}1 \end{pmatrix}$ (Ende

2016) -> $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 10/11 & 1/7 & 9/59 \\ 2/33 & 6/7 & 0 \\ 1/33 & 0 & 50/59 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4{,}3 \\ 2{,}6 \\ 5{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}06 \\ 2{,}49 \\ 4{,}45 \end{pmatrix}$ (Ende 2017)

Datenblatt: Leontiefmodell

Das Leontiefmodell ist ein volkswirtschaftliches Gesamtmodell, das rechnerisch Zusammenhänge zwischen der Produktion und Konsumtion einer Volkswirtschaft darstellt.

I. Dazu ist zu volkwirtschaftlichen Sektoren Z_1, … Z_n eine Input-Output-Tabelle (Verflechtungstabelle) gegeben, die die Produktionsströme (Liefer- bzw. Verbrauchsmengen) zwischen den Sektoren angibt. Die n x n-Matrix der Input-Output-Tabelle wird dabei durch den Konsum-/ Nachfragevektor (K) und den Produktionsvektor (P) ergänzt. Insgesamt ergibt sich als Verflechtungstabelle X:

	Z_1	Z_2	Z_3	…	Z_n	K	P
Z_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…	x_{1n}	y_1	x_1
Z_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…	x_{2n}	y_2	x_2
Z_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	…	x_{3n}	y_3	x_3
…	…	…	…	…	…	…	…
Z_n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	…	x_{nn}	y_n	x_n

Gemäß den Annahmen des Leontiefmodells gilt dann:

a) $x_{ij} \geq 0$ für alle i, j = 1,… n; $y_i \geq 0$ für alle i = 1,… n
(d.h.: es werden nichtnegative Mengen produziert und konsumiert)

b) $x_{11} + x_{12} + x_{13} + \ldots + y_1 = x_1$
$x_{21} + x_{22} + x_{23} + \ldots + y_2 = x_2$
$x_{31} + x_{32} + x_{33} + \ldots + y_3 = x_3$
…
(d.h.: die Gesamtproduktion P ist die Summe von Einzelproduktionen und Konsum)

Aus der Verflechtungstabelle X ergibt sich gemäß der Annahme des Leontiefmodells, wonach die Produktionsmengen im selben Verhältnis zur Gesamtproduktion steigen, die Input- oder Produktionsmatrix (Technologiematrix) A:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{x_{11}}{x_1} & \frac{x_{12}}{x_2} & \frac{x_{13}}{x_3} & \ldots \\ \frac{x_{21}}{x_1} & \frac{x_{22}}{x_2} & \frac{x_{23}}{x_3} & \ldots \\ \frac{x_{31}}{x_1} & \frac{x_{32}}{x_2} & \frac{x_{33}}{x_3} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

Es gilt also: $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$ bzw. $x_{ij} = x_j a_{ij}$ für alle i, j = 1, … n, d.h.: man erhält die Elemente der k. Spalte der Inputmatrix A durch Division mit der Gesamtproduktion der k. Zeile, die Elemente der k. Spalte der Verflechtungstabelle X durch Multiplikation der entsprechenden Elemente der Inputmatrix mit der Gesamtproduktion der k. Zeile. Weiter gilt: $0 \leq a_{ij} \leq 1$ für alle i, j = 1, … n.

III. Gemäß den Vorgaben der Inputmatrix A, des Produktionsvektors $\vec{x}$ und des Konsumvektors $\vec{y}$ mit:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \ldots \end{pmatrix}$$

gilt der folgende Zusammenhang:

$$A\vec{x} + \vec{y} = \vec{x}$$

, was wir umformen können zu:

$$(E - A)\vec{x} = \vec{y} \text{ bzw. } (E - A)^{-1}\vec{y} = \vec{x}$$

(mit E als Einheitsmatrix). E–A ist die Leontiefmatrix, für die im Fall der Existenz der Leontiefinversen $(E–A)^{-1}$ gilt:

a) $[(E–A)^{-1}]^{-1} = E–A$
b) $A = E – (E–A)$
c) Bei $(E–A)^{-1} \geq O$ (mit O als Nullmatrix) kann jede beliebige Nachfrage befriedigt werden.

Insgesamt ergibt sich bzgl. des Leontiefmodells also das folgende, die rechnerischen Zusammenhänge zusammenfassende <u>Schema</u>:

Input-Output-Tabelle (Verflechtungstabelle) X, Produktionsvektor $\vec{x}$, Konsumvektor $\vec{y}$:

$$X = \left(\begin{array}{cccc|c|c} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & y_1 & x_1 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & y_2 & x_2 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \dots & y_3 & x_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right), \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \Updownarrow x_{ij} = x_j a_{ij}$$

Inputmatrix (Produktionsmatrix, Technologiematrix) A:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{x_{11}}{x_1} & \frac{x_{12}}{x_2} & \frac{x_{13}}{x_3} & \dots \\ \frac{x_{21}}{x_1} & \frac{x_{22}}{x_2} & \frac{x_{23}}{x_3} & \dots \\ \frac{x_{31}}{x_1} & \frac{x_{32}}{x_2} & \frac{x_{33}}{x_3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Leontief-Gleichungen mit Leontiefmatrix E–A und Leontiefinversen $(E–A)^{-1}$:

$$A\vec{x} + \vec{y} = \vec{x}, \quad (E - A)\vec{x} = \vec{y}, \quad (E - A)^{-1}\vec{y} = \vec{x}$$

<u>Beispiel</u> (Leontiefmodell):

Die zwei Sektoren Z_1 (Industrie, Landwirtschaft) und Z_2 (Dienstleistung) innerhalb einer Volkswirtschaft sind mit dem Konsum (K) und mit der Gesamtproduktion (P) über die folgende Verflechtungstabelle für eine Zeitperiode (hier: ein Jahrzehnt) verbunden:

	Z_1	Z_2	K	P
Z_1	x_{11}	4	10	20
Z_2	2	1	7	x_2

(

	Z_1	Z_2	K	P
Z_1	x_{11}	x_{12}	y_1	x_1
Z_2	x_{21}	x_{22}	y_2	x_2

)

Die fehlenden Größen in der Verflechtungstabelle ergeben sich als: $x_{11} = 20–10–4 = 6$, $x_2 = 2+1+7 = 10$. Die Verflechtungstabelle lautet vollständig:

	Z_1	Z_2	K	P
Z_1	6	4	10	20
Z_2	2	1	7	10

Die Inputmatrix A errechnet sich als:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{x_{11}}{x_1} & \frac{x_{12}}{x_2} \\ \frac{x_{21}}{x_1} & \frac{x_{22}}{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{20} & \frac{4}{10} \\ \frac{2}{20} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix E–A ist dann:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}4 \\ -0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

In der folgenden Zeitperiode gilt für den Vektor der Gesamtproduktion: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \end{pmatrix}$. Der Konsumvektor $\vec{y}$ errechnet sich mit Hilfe der Matrix E–A:

$$\vec{y} = (E - A)\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}4 \\ -0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9{,}6 \\ 13{,}8 \end{pmatrix}$$

Der vom Sektor Z_2 herrührende Konsum hat sich also fast verdoppelt, der vom Sektor Z_1 bereitgestellte Konsum ist leicht zurückgegangen.

Aufgabenblatt: Leontiefmodell

1. Gegeben ist in einer Marktwirtschaft, die sich nach dem Leontief-System verhält, die Verflechtungsmatrix zwischen drei Sektoren A, B, C, den Markt M und Produktion P:

	A	B	C	M	P
A	a	40	40	20	120
B	20	20	c	60	160
C	20	b	20	40	100

a) Vervollständige die Verflechtungsmatrix durch Berechnung von a, b und c.
b) Wie lautet die Inputmatrix?
c) Wie groß ist die Marktabgabe, wenn A 180, B 120 und C 100 Mengeneinheiten produzieren.

2. Die Zweigwerke Z_1, Z_2 und Z_3 einer Unternehmung sind gemäß dem Leontiefmodell mit dem Markt verflochten.

a) Bestimme die Inputmatrix A, wenn gegeben ist:

$$E - A = \begin{pmatrix} 0{,}75 & -0{,}1 & 0 \\ -0{,}625 & 0{,}85 & -0{,}4 \\ -0{,}375 & -0{,}05 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

b) Wie lautet der Konsumvektor, wenn die Zweigwerke Z_1 60 Mengeneinheiten (ME), Z_2 120 ME und Z_3 60 ME produzieren?
c) Bestimme, wie groß die Gesamtproduktion der Zweigwerke sein muss, wenn Z_1 20 ME, Z_2 40 ME und Z_3 25 Mengeneinheiten an den Markt abgibt. Wie sieht die diesbezügliche Verflechtungstabelle aus?
d) Wie stellt sich die Input-Output-Tabelle dar, wenn Zweigwerk Z_1 80 ME herstellt, die Zweigwerke Z_2 und Z_3 gleich viel produzieren und die Marktabgabe von Zweigwerk Z_2 40 ME beträgt.

<u>Lösungen</u>: 1.a) a=20, b=20, c=60; b) A = $\begin{pmatrix} 1/6 & 1/4 & 2/5 \\ 1/6 & 1/8 & 3/5 \\ 1/6 & 1/8 & 1/5 \end{pmatrix}$; c) $\vec{y} = \begin{pmatrix} 80 \\ 15 \\ 35 \end{pmatrix}$

2.a) A = $\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}625 & 0{,}15 & 0{,}4 \\ 0{,}375 & 0{,}05 & 0{,}1 \end{pmatrix}$; b) $\vec{y} = \begin{pmatrix} 80 \\ 15 \\ 35 \end{pmatrix}$; c) Verflechtungstabelle:

	Z_1	Z_2	Z_3	K	P
Z_1	10	10	0	20	40
Z_2	25	15	20	40	100
Z_3	15	5	5	25	50

d) Ansatz: $\vec{y} = (E - A)\vec{x}$ -> $\begin{pmatrix} y_1 \\ 40 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & -0{,}1 & 0 \\ -0{,}625 & 0{,}85 & -0{,}4 \\ -0{,}375 & -0{,}05 & 0{,}9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 80 \\ x \\ x \end{pmatrix}$ -> x = 200, y_1 = 40, y_2 = 140 ->

Verflechtungstabelle:

	Z_1	Z_2	Z_3	K	P
Z_1	20	20	0	40	80
Z_2	50	30	80	40	200
Z_3	30	10	20	140	200

Datenblatt: Lineare Optimierung I – Grafische Lösung, Eckpunktverfahren

Ein Problem der linearen Optimierung hinsichtlich reeller Variablen x, y … besteht aus einem System von linearen Ungleichungen mit den Unbekannten x, y … (Nebenbedingungen, Restriktionen) und einer zu minimierenden oder zu maximierenden linearen Zielfunktion z = z(x,y,…). Die Bedingungen spannen dann ein mehrdimensionales Vieleck (Simplex), den zulässigen Bereich, auf, z.B. im 2-Dimensionalen ein konvexes Vieleck mit den für die Lösung des Optimierungsproblems wichtigen Eckpunkten.

Beispiel (lineare Optimierung):

Gegeben ist das folgende lineare Optimierungsproblem:

Maximiere die *Zielfunktion* z(x,y) = 4x + y

bzgl. der *Restriktionen*:

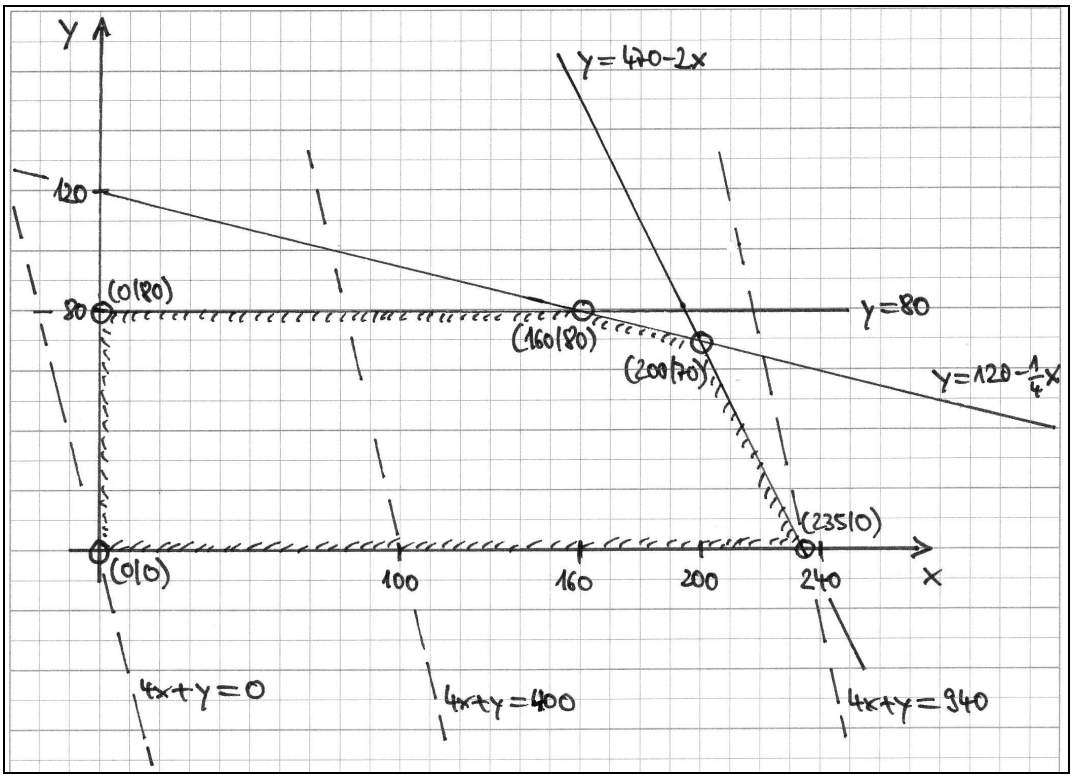
$x, y \geq 0$
$x + 4y \leq 480$
$2x + y \leq 470$
$y \leq 80$

Lösung: I. Wir bestimmen den zulässigen Bereich, indem wir den Rand des aus den Nebenbedingungen resultierenden Vielecks durch die mit den Gleichungen verbundenen Gleichungen beschreiben. Es gilt:

1) x = 0 (y-Achse); 2) y = 0 (x-Achse); 3) $x + 4y = 480 \Leftrightarrow 4y = 480 - x \Leftrightarrow y = 120 - \frac{1}{4}x$;

4) $2x + y = 470 \Leftrightarrow y = 470 - 2x$; 5) y = 80

Der zulässige Bereich hat einschließlich verschiedener Niveaulinien der Zielfunktion dann das Aussehen:



II. Wir bestimmen die Eckpunkte des zulässigen Bereichs:

1) x=0, y=0: $P_1(0|0)$
2) y=0, y = 470 - 2x: $470 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = 470 \Leftrightarrow x = 235$: y=0, $P_2(235|0)$
3) $y = 120 - \frac{1}{4}x$, y = 470 - 2x: $120 - \frac{1}{4}x = 470 - 2x \Leftrightarrow 2x - \frac{1}{4}x = 350 \Leftrightarrow \frac{7}{4}x = 350 \Leftrightarrow x = 200$:
$y = 470 - 2 \cdot 200 = 70$, $P_3(200|70)$

4) $y = 120 - \frac{1}{4}x$, $y=80$: $120 - \frac{1}{4}x = 80 \Leftrightarrow 40 = \frac{1}{4}x \Leftrightarrow x = 160$: $y=80$, $P_4(160|80)$

5) $x=0$, $y=80$: $P_5(0|80)$

III. Wir bestimmen die Werte der Zielfunktion an den Punkten P_1 bis P_5. Es gilt mit der Zielfunktion $z = z(x,y) = 4x + y$:

1) $P_1(0|0)$: $z = z(0,0) = 0 + 0 = 0$
2) $P_2(235|0)$: $z = z(235,0) = 4 \cdot 235 = 940$
3) $P_3(200|70)$: $z = z(200,70) = 800 + 70 = 870$
4) $P_4(160|80)$: $z = z(160,80) = 640 + 80 = 720$
5) $P_5(0|80)$: $z = z(0,80) = 0 + 80 = 80$

IV. Die Zielfunktion ist zu maximieren, der Punkt mit dem größten Zielfunktionswert $z = 940$ ist: $P_2(235|0)$.

Datenblatt: Lineare Optimierung II – Simplexverfahren

Ein Problem der linearen Optimierung hinsichtlich reeller Variablen x, y … besteht aus einem System von linearen Ungleichungen mit den Unbekannten x, y … (Nebenbedingungen, Restriktionen) und einer zu minimierenden oder zu maximierenden linearen Zielfunktion z = z(x,y,…). Die Bedingungen spannen dann ein mehrdimensionales Vieleck (Simplex), den zulässigen Bereich, auf, z.B. im 2-Dimensionalen ein konvexes Vieleck mit den für die Lösung des Optimierungsproblems wichtigen Eckpunkten. Das Verfahren, das Probleme der linearen Optimierung löst, ist das Simplexverfahren, ein auf dem Gaußverfahren für lineare Gleichungssysteme beruhender Algorithmus. Es soll anhand von Beispielen erklärt werden.

Beispiele (lineare Optimierung):

1. Gegeben ist das folgende *Optimierungsproblem*:

Maximiere die *Zielfunktion*	bzgl. der *Restriktionen*:
$z = 10x + 20y - 10$	$x, y \geq 0$
	$x + 2y \leq 20$
	$x + y \leq 15$
	$y \leq 8$

Lösung: Wir erhalten das Anfangstableau, indem wir zu den Variablen x,y die Schlupfvariablen u_1, u_2 und u_3 (für jede Restriktion) einführen sowie die Zielfunktion z = 10x + 20y, also:

$$x, y \geq 0$$
$$x + 2y + u_1 = 20$$
$$x + y + u_2 = 15$$
$$y + u_3 = 8$$
$$10x + 20y = z + 10$$

oder als Matrix:

	x	y	u_1	u_2	u_3	
1. Restriktion	1	2	1	0	0	20
2. Restriktion	1	1	0	1	0	15
3. Restriktion	0	$\boxed{1}$	0	0	1	8
Zielfunktion	10	20	0	0	0	z + 10

Nichtbasisvariablen sind hier x, y = 0, Basisvariablen $u_1 = 20$, $u_2 = 15$, $u_3 = 8$ ($\neq 0$), erkennbar daran, dass sog. Einheitsvektoren (eine 1, sonst Nullen) in der entsprechenden Spalte stehen.

Schritt 1: Als Pivotspalte wählen wir die Spalte mit dem betragsmäßig größten positiven Koeffizienten der Zielfunktion, also Spalte 2 (mit Koeffizient 20). Als Pivotzeile wählen wir die Zeile ungleich der Zielfunktionszeile, bei der der Quotient von rechter Seite und positivem Koeffizienten der Elemente der Pivotspalte am kleinsten ist, also wegen $\frac{20}{2}$, $\frac{15}{1}$ und $\frac{8}{1}$ die Zeile der Restriktion 3. Das Pivotelement („Drehelement“) ist der Schnittpunkt zwischen solcherart ermittelter Spalte und Zeile, also hier der y-Spalte und der Zeile der 3. Restriktion, es lautet 1. Es gelten nun die sich aus dem Gauß-Algorithmus herleitenden Rechenregeln: Es werden in der Pivotspalte außer beim Pivotelement lauter Nullen erzeugt, die Pivotzeile wird durch das Pivotelement geteilt. y wird damit zu einer Basisvariablen, u_3 wird Nichtbasisvariable. Im Einzelnen wird das negative Mehrfache der Pivotzeile auf ein entsprechendes Mehrfaches der anderen Zeilen addiert, d.h. hier mit I-III als Zeilen der 1. bis 3. Restriktion und IV als Zeile der Zielfunktion und mit III als Pivotzeile: I – 2·III, II – III, IV – 20·III:

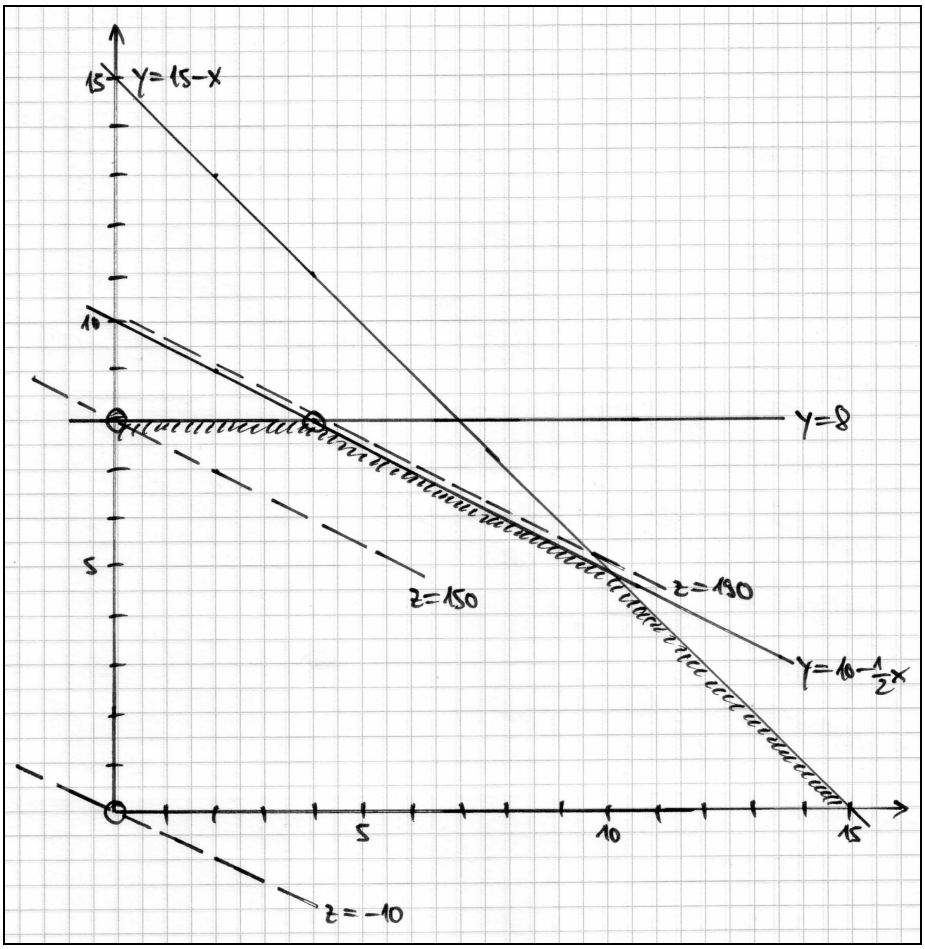
	x	y	u_1	u_2	u_3	
1. Restriktion	$\boxed{1}$	0	1	0	-2	4
2. Restriktion	1	0	0	1	-1	7
3. Restriktion	0	1	0	0	1	8
Zielfunktion	10	0	0	0	-20	z – 150

Wir haben damit von der Ecke (x, y) = (0, 0) die Ecke (x, y) = (0, 8) erreicht, y ist Basisvariable geworden und damit positiv, u_3 wurde zur Nichtbasisvariable mit $u_3 = 0$.

Schritt 2: Als Pivotspalte wählen wir die Spalte mit dem positiven Zielfunktionskoeffizienten 10, also Spalte 1, als Pivotzeile wegen $\frac{4}{1}$ und $\frac{7}{1}$ die Zeile der Restriktion 1. Pivotelement ist also die „1“, vertauscht werden x und u_1, x wird zur Basis-, u_1 zur Nichtbasisvariablen vermöge der Gleichungsumformungen II – I, IV – 10·I:

	x	y	u_1	u_2	u_3	
1. Restriktion	1	0	1	0	-2	4
2. Restriktion	0	0	-1	1	1	3
3. Restriktion	0	1	0	0	1	8
Zielfunktion	0	0	-10	0	0	z – 190

Wir haben also von der Ecke (x, y) = (0, 8) die Ecke (x, y) = (4, 8) erreicht Da die Zielfunktionszeile nur noch nichtpositive Koeffizienten enthält, sind wir fertig. Die Lösung ist, da x und y in der Basis stehen: x = 4, y = 8; die Nichtbasisvariablen sind: $u_1 = 0$, $u_3 = 0$; u_2 hat als weitere Basisvariable den Wert: $u_2 = 3$, d.h.: die 2. Restriktion ist durch x und y nicht völlig ausgeschöpft. Der Zielfunktionswert ist z(4, 8) = 40 + 160 – 10 = 190 oder gleichermaßen nach dem Endtableau wegen: 0·4 + 0·8 – 10·0 + 0·3 + 0·0 = z – 190: 0 = z – 190 ⇔ z = 190.



2. Gegeben ist das folgende *Optimierungsproblem*:

Maximiere die *Zielfunktion*	bzgl. der *Restriktionen*:
z = 5x + 4y	x, y ≥ 0
	8x + 4y ≤ 108
	4x + 4y ≤ 108
	6x + 12y ≤ 108

<u>Lösung</u>: Wir erhalten das Anfangstableau, indem wir zu den Variablen x,y die Schlupfvariablen u_1, u_2 und u_3 (für jede Restriktion) einführen sowie die Zielfunktion z = 5x + 4y, also:

x, y ≥ 0
$8x + 4y + u_1 = 108$
$4x + 4y + u_2 = 108$
$6x + 12y + u_3 = 108$
5x + 4y = z

oder als Matrix:

	x	y	u_1	u_2	u_3	
1. Restriktion	$\boxed{8}$	4	1	0	0	108
2. Restriktion	4	4	0	1	0	108
3. Restriktion	6	12	0	0	1	108
Zielfunktion	5	4	0	0	0	z

Die (Ausgangs-) Ecke, die das Tableau darstellt, ist (x,y) = (0,0). Da 5 der größere positive Zielfunktionskoeffizient ist, wählen wir Spalte 1 als Pivotspalte, die Quotienten 108/8, 108/4, 108/6 weisen auf Zeile 1 als Pivotzeile, so dass 8 Pivotelement ist. Die Umformungen 4·II – 2·I, 4·III – 3·I und 8·IV – 5·I ergeben:

	x	y	u_1	u_2	u_3	
1. Restriktion	8	4	1	0	0	108
2. Restriktion	0	8	-2	1	0	216
3. Restriktion	0	$\boxed{36}$	-3	0	1	108
Zielfunktion	0	12	-5	0	0	8z – 540

Zum Tableau gehört die Ecke (x,y) = (13,5; 0) (wegen: 13,5 = 108/8 bei der 1. Restriktion). Die 12 ist der einzige positive Zielfunktionskoeffizient, daher ist Spalte 2 die Pivotspalte. Wegen 108/4 = 216/8 > 108/36 ist Zeile 3 die Pivotzeile, das Pivotelement mithin 36. Die Umformungen 9·I – III, 9·II – 2·III und 3·IV – III ergeben:

	x	y	u_1	u_2	u_3	
1. Restriktion	72	0	12	0	-1	864
2. Restriktion	0	0	-12	1	-2	1728
3. Restriktion	0	36	-3	0	1	108
Zielfunktion	0	0	-12	0	-1	24z – 1728

Alle Zielfunktionskoeffizienten im Tableau sind nichtpositiv. Daher endet das Simplex-Verfahren, und es gilt: 72x = 864 ⇔ x = 12, 36y = 108 ⇔ y = 3. Optimale Ecke ist somit: (x,y) = (12; 3). Der Zielfunktionswert ist: 24z – 1728 = 0 ⇔ 24z = 1728 ⇔ z = 72.

Das Simplex-Verfahren durchlief die folgenden Ecken (x, y) des Simplexes (des zulässigen Bereichs) bei folgender Erhöhung des Zielfunktionswertes z:

(x,y):	(0; 0)	-> (13,5; 0)	-> (12; 3)
z:	0	-> 67,5	-> 72

1. (Zweidimensionales) <u>lineares Optimierungsproblem</u>: 2 Variablen, 3 Restriktion(en), Nichtnegativitätsbedingungen, Zielfunktion

Nichtnegativität: x_1, $x_2 \geq 0$

1. Restriktion: $+ 1x_1 \leq 20$

2. Restriktion: $+ 1x_2 \leq 40$

3. Restriktion: $+ 2x_1 + 1x_2 \leq 60$

Zielfunktion: $+ 2x_1 + 3x_2 =$ z -> Maximum

<u>Lösung</u>: <u>Anfangstableau</u>: 3 Schlupfvariable(n), * = Basisvariable

	x_1	x_2	$*u_1$	$*u_2$	$*u_3$	b	z
1. Restriktion:	1	0	1	0	0	20	0
2. Restriktion:	0	1	0	1	0	40	0
3. Restriktion:	2	1	0	0	1	60	0
Zielfunktion:	2	3	0	0	0	0	1

Ecke: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $u_1 = 20$, $u_2 = 40$, $u_3 = 60$, z = 0

<u>1. Schritt</u>: Pivotzeile = 2, Pivotspalte = 2: 1*(*3*) - 1*(*2*) / 1*(*Z*) - 3*(*2*) /

	x_1	$*x_2$	$*u_1$	u_2	$*u_3$	b	z
1. Restriktion:	1	0	1	0	0	20	0
2. Restriktion:	0	1	0	1	0	40	0
3. Restriktion:	2	0	0	-1	1	20	0
Zielfunktion:	2	0	0	-3	0	-120	1

Ecke: $x_1 = 0$, $x_2 = 40$, $u_1 = 20$, $u_2 = 0$, $u_3 = 20$, z = 120

<u>2. Schritt</u>: Pivotzeile = 3, Pivotspalte = 1: 2*(*1*) - 1*(*3*) / 1*(*Z*) - 1*(*3*) /

	$*x_1$	$*x_2$	$*u_1$	u_2	u_3	b	z
1. Restriktion:	0	0	2	1	-1	20	0
2. Restriktion:	0	1	0	1	0	40	0
3. Restriktion:	2	0	0	-1	1	20	0
Zielfunktion:	0	0	0	-2	-1	-140	1

Ecke: $x_1 = 10$, $x_2 = 40$, $u_1 = 10$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, z = 140

<u>Optimale Ecke</u>: $x_1 = 10$, $x_2 = 40$, $u_1 = 10$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, z = 140

2. (Dreidimensionales) <u>lineares Optimierungsproblem</u>: 3 Variablen, 3 Restriktion(en), Nichtnegativitätsbedingungen, Zielfunktion

Nichtnegativität: x_1, x_2, $x_3 \geq 0$

1. Restriktion: $+ 1x_1 \leq 50$

2. Restriktion: $+ 1x_2 \leq 80$

3. Restriktion: $+ 1x_3 \leq 40$

Zielfunktion: $+ 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 =$ z -> Maximum

<u>Lösung</u>: <u>Anfangstableau</u>: 3 Schlupfvariable(n), * = Basisvariable

	x_1	x_2	x_3	$*u_1$	$*u_2$	$*u_3$	b	z
1. Restriktion:	1	0	0	1	0	0	50	0
2. Restriktion:	0	1	0	0	1	0	80	0
3. Restriktion:	0	0	1	0	0	1	40	0
Zielfunktion:	3	2	1	0	0	0	0	1

Ecke: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $u_1 = 50$, $u_2 = 80$, $u_3 = 40$, z = 0

1. Schritt: Pivotzeile = 1, Pivotspalte = 1: 1*(*Z*) - 3*(*1*) /

	*x_1	x_2	x_3	u_1	*u_2	*u_3	b	z
1. Restriktion:	1	0	0	1	0	0	50	0
2. Restriktion:	0	1	0	0	1	0	80	0
3. Restriktion:	0	0	1	0	0	1	40	0
Zielfunktion:	0	2	1	-3	0	0	-150	1

Ecke: $x_1 = 50$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 80$, $u_3 = 40$, z = 150

2. Schritt: Pivotzeile = 2, Pivotspalte = 2: 1*(*Z*) - 2*(*2*) /

	*x_1	*x_2	x_3	u_1	u_2	*u_3	b	z
1. Restriktion:	1	0	0	1	0	0	50	0
2. Restriktion:	0	1	0	0	1	0	80	0
3. Restriktion:	0	0	1	0	0	1	40	0
Zielfunktion:	0	0	1	-3	-2	0	-310	1

Ecke: $x_1 = 50$, $x_2 = 80$, $x_3 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 40$, z = 310

3. Schritt: Pivotzeile = 3, Pivotspalte = 3: 1*(*Z*) - 1*(*3*) /

	*x_1	*x_2	*x_3	u_1	u_2	u_3	b	z
1. Restriktion:	1	0	0	1	0	0	50	0
2. Restriktion:	0	1	0	0	1	0	80	0
3. Restriktion:	0	0	1	0	0	1	40	0
Zielfunktion:	0	0	0	-3	-2	-1	-350	1

Ecke: $x_1 = 50$, $x_2 = 80$, $x_3 = 40$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, z = 350

Optimale Ecke: $x_1 = 50$, $x_2 = 80$, $x_3 = 40$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, z = 350

3. (Zweidimensionales) lineares Optimierungsproblem: 2 Variablen, 2 Restriktion(en), Nichtnegativitätsbedingungen, Zielfunktion

Nichtnegativität: x_1, $x_2 \geq 0$

1. Restriktion: $+ 15x_1 + 30x_2 \leq 450$

2. Restriktion: $+ 25x_1 + 20x_2 \leq 480$

Zielfunktion: $+ 40x_1 + 60x_2 =$ z -> Maximum

Lösung: Einführung von Schlupfvariablen: 2 Schlupfvariable(n)

Nichtnegativität: x_1, $x_2 \geq 0$

u_1, $u_2 \geq 0$

1. Restriktion: $+ 15x_1 + 30x_2 + 1u_1 = 450$

2. Restriktion: $+ 25x_1 + 20x_2 + 1u_2 = 480$

Zielfunktion: $+ 40x_1 + 60x_2 =$ z -> Maximum

Anfangstableau: * = Basisvariable

	x_1	x_2	*u_1	*u_2	b	z
1. Restriktion:	15	30	1	0	450	0
2. Restriktion:	25	20	0	1	480	0
Zielfunktion:	40	60	0	0	0	1

Ecke: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $u_1 = 450$, $u_2 = 480$, z = 0

1. Schritt: Pivotzeile = 1, Pivotspalte = 2: 3*(*2*) - 2*(*1*) / 1*(*Z*) - 2*(*1*) /

	x_1	*x_2	u_1	*u_2	b	z
1. Restriktion:	15	30	1	0	450	0
2. Restriktion:	45	0	-2	3	540	0
Zielfunktion:	10	0	-2	0	-900	1

Ecke: $x_1 = 0$, $x_2 = 15$, $u_1 = 0$, $u_2 = 180$, z = 900

2. Schritt: Pivotzeile = 2, Pivotspalte = 1: 3*(*1*) - 1*(*2*) / 9*(*Z*) - 2*(*2*) /

	$*x_1$	$*x_2$	u_1	u_2		b	z
1. Restriktion:	0	90	5	-3	|	810	0
2. Restriktion:	45	0	-2	3	|	540	0
Zielfunktion:	0	0	-14	-6	|	-9180	9

Ecke: $x_1 = 12$, $x_2 = 9$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, z = 1020

Optimale Ecke: $x_1 = 12$, $x_2 = 9$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, z = 1020

4. (Zweidimensionales) lineares Optimierungsproblem: 2 Variablen, 2 Restriktion(en), Nichtnegativitätsbedingungen, Zielfunktion

Nichtnegativität: $x_1, \quad x_2 \geq 0$

1. Restriktion: $+ 6x_1 + 4x_2 \leq 600$

2. Restriktion: $+ 4x_1 + 8x_2 \leq 800$

3. Restriktion: $+ 5x_2 \leq 400$

Zielfunktion: $+ 2x_1 + 3x_2 =$ z -> Maximum

Lösung: Einführung von Schlupfvariablen: 3 Schlupfvariable(n)

Nichtnegativität: $x_1, \quad x_2 \geq 0$

$u_1, \quad u_2, \quad u_3 \geq 0$

1. Restriktion: $+ 6x_1 + 4x_2 + 1u_1 = 600$

2. Restriktion: $+ 4x_1 + 8x_2 + 1u_2 = 800$

3. Restriktion: $+ 5x_2 + 1u_3 = 400$

Zielfunktion: $+ 2x_1 + 3x_2 =$ z -> Maximum

Anfangstableau: * = Basisvariable

	x_1	x_2	$*u_1$	$*u_2$	$*u_3$		b	z
1. Restriktion:	6	4	1	0	0	|	600	0
2. Restriktion:	4	8	0	1	0	|	800	0
3. Restriktion:	0	5	0	0	1	|	400	0
Zielfunktion:	2	3	0	0	0	|	0	1

Ecke: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $u_1 = 600$, $u_2 = 800$, $u_3 = 400$, z = 0

1. Schritt: Pivotzeile = 3, Pivotspalte = 2: 5*(*1*) - 4*(*3*) / 5*(*2*) - 8*(*3*) / 5*(*Z*) - 3*(*3*) /

	x_1	$*x_2$	$*u_1$	$*u_2$	u_3		b	z
1. Restriktion:	30	0	5	0	-4	|	1400	0
2. Restriktion:	20	0	0	5	-8	|	800	0
3. Restriktion:	0	5	0	0	1	|	400	0
Zielfunktion:	10	0	0	0	-3	|	-1200	5

Ecke: $x_1 = 0$, $x_2 = 80$, $u_1 = 280$, $u_2 = 160$, $u_3 = 0$, z = 240

2. Schritt: Pivotzeile = 2, Pivotspalte = 1: 2*(*1*) - 3*(*2*) / 2*(*Z*) - 1*(*2*) /

	$*x_1$	$*x_2$	$*u_1$	u_2	u_3		b	z
1. Restriktion:	0	0	10	-15	16	|	400	0
2. Restriktion:	20	0	0	5	-8	|	800	0
3. Restriktion:	0	5	0	0	1	|	400	0
Zielfunktion:	0	0	0	-5	2	|	-3200	10

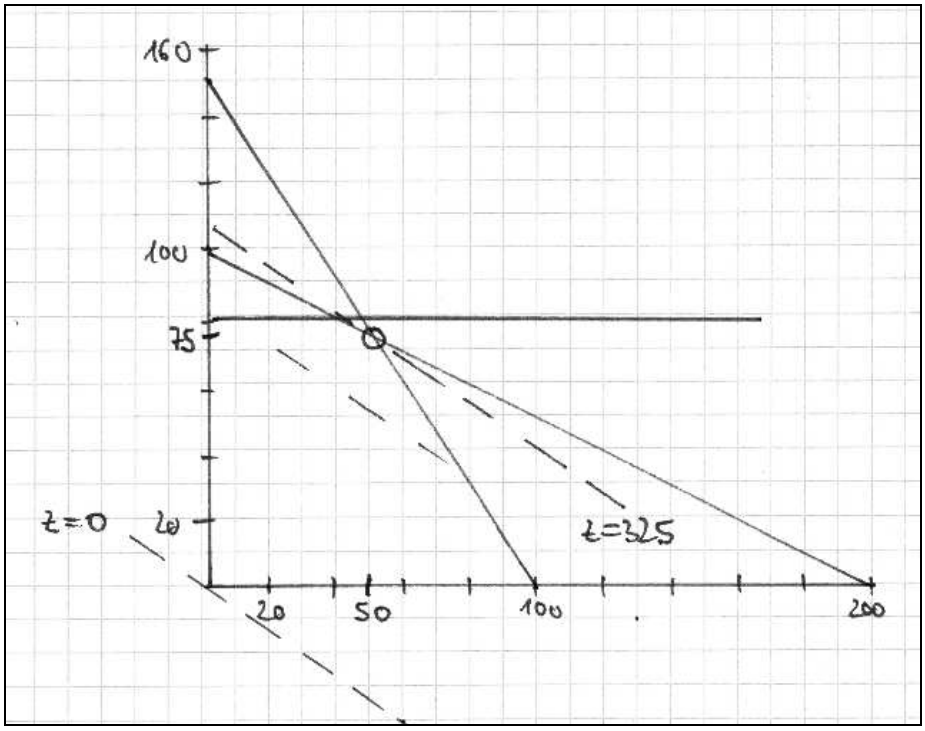
Ecke: $x_1 = 40$, $x_2 = 80$, $u_1 = 40$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, z = 320

3. Schritt: Pivotzeile = 1, Pivotspalte = 3: 2*(*2*) + 1*(*1*) / 16*(*3*) - 1*(*1*) / 8*(*Z*) - 1*(*1*) /

	$*x_1$	$*x_2$	u_1	u_2	$*u_3$		b	z
1. Restriktion:	0	0	10	-15	16	|	400	0
2. Restriktion:	40	0	10	-5	0	|	2000	0
3. Restriktion:	0	80	-10	15	0	|	6000	0
Zielfunktion:	0	0	-10	-25	0	|	-26000	80

Ecke: $x_1 = 50$, $x_2 = 75$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 25$, z = 325

Optimale Ecke: $x_1 = 50$, $x_2 = 75$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 25$, z = 325



5. (Zweidimensionales) <u>lineares Optimierungsproblem</u>: 2 Variablen, 3 Restriktion(en), Nichtnegativitätsbedingungen, Zielfunktion, andere Zielfunktion -> andere optimale Ecke)

Nichtnegativität: x_1, $x_2 \geq 0$

1. Restriktion: $+ 6x_1 + 4x_2 \leq 600$

2. Restriktion: $+ 4x_1 + 8x_2 \leq 800$

3. Restriktion: $+ 5x_2 \leq 400$

Zielfunktion: $+ 2x_1 + 4x_2 =$ z -> Maximum

<u>Lösung</u>: <u>Einführung von Schlupfvariablen</u>: 3 Schlupfvariable(n)

Nichtnegativität: x_1, $x_2 \geq 0$

u_1, u_2, $u_3 \geq 0$

1. Restriktion: $+ 6x_1 + 4x_2 + 1u_1 = 600$

2. Restriktion: $+ 4x_1 + 8x_2 + 1u_2 = 800$

3. Restriktion: $+ 5x_2 + 1u_3 = 400$

Zielfunktion: $+ 2x_1 + 4x_2 =$ z -> Maximum

<u>Anfangstableau</u>: * = Basisvariable

	x_1	x_2	$*u_1$	$*u_2$	$*u_3$	b	z
1. Restriktion:	6	4	1	0	0	600	0
2. Restriktion:	4	8	0	1	0	800	0
3. Restriktion:	0	5	0	0	1	400	0
Zielfunktion:	2	4	0	0	0	0	1

Ecke: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $u_1 = 600$, $u_2 = 800$, $u_3 = 400$, z = 0

<u>1. Schritt</u>: Pivotzeile = 3, Pivotspalte = 2: 5*(*1*) - 4*(*3*) / 5*(*2*) - 8*(*3*) / 5*(*Z*) - 4*(*3*) /

	x_1	$*x_2$	$*u_1$	$*u_2$	u_3	b	z
1. Restriktion:	30	0	5	0	-4	1400	0
2. Restriktion:	20	0	0	5	-8	800	0
3. Restriktion:	0	5	0	0	1	400	0
Zielfunktion:	10	0	0	0	-4	-1600	5

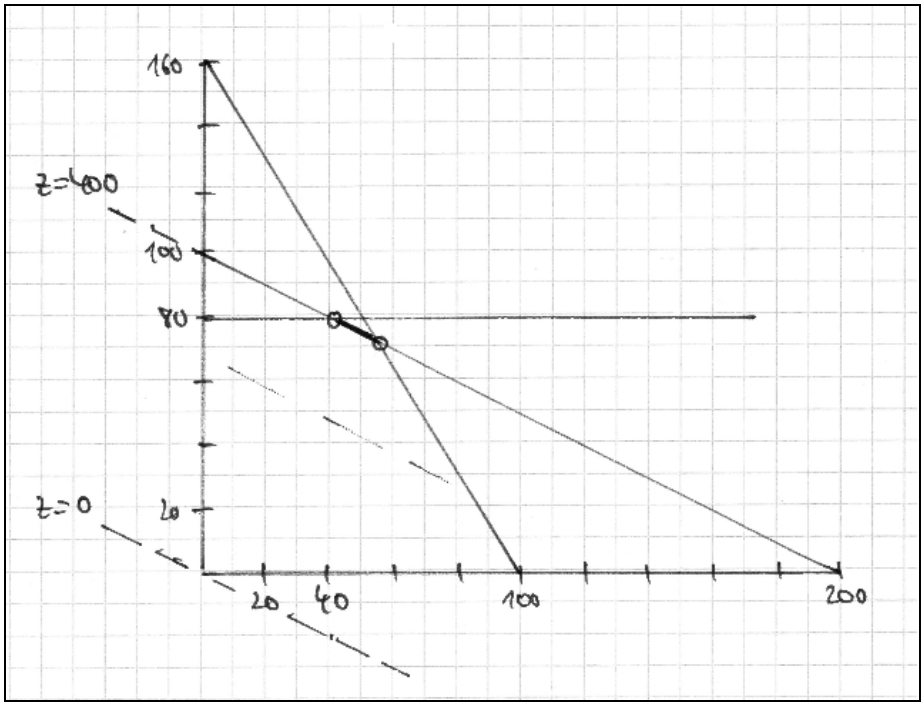
Ecke: $x_1 = 0$, $x_2 = 80$, $u_1 = 280$, $u_2 = 160$, $u_3 = 0$, z = 320

2. Schritt: Pivotzeile = 2, Pivotspalte = 1: 2*(*1*) - 3*(*2*) / 2*(*Z*) - 1*(*2*) /

	$*x_1$	$*x_2$	$*u_1$	u_2	u_3	|	b	z
1. Restriktion:	0	0	10	-15	16	|	400	0
2. Restriktion:	20	0	0	5	-8	|	800	0
3. Restriktion:	0	5	0	0	1	|	400	0
Zielfunktion:	0	0	0	-5	0	|	-4000	10

Ecke: $x_1 = 40$, $x_2 = 80$, $u_1 = 40$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, z = 400

Optimale Ecke (als Teil einer mehrdeutigen Lösung): $x_1 = 40$, $x_2 = 80$, $u_1 = 40$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, z = 400



6. (Zweidimensionales) lineares Optimierungsproblem: 2 Variablen, 3 Restriktion(en), Nichtnegativitätsbedingungen, Zielfunktion

Nichtnegativität: $x_1, \quad x_2 \geq 0$

1. Restriktion: $+ 1x_1 + 2x_2 \leq 400$

2. Restriktion: $+ 2x_1 + 2x_2 \leq 500$

3. Restriktion: $+ 2x_1 + 1x_2 \leq 400$

Zielfunktion: $+ 320x_1 + 320x_2 =$ z -> Maximum

Lösung: Einführung von Schlupfvariablen: 3 Schlupfvariable(n)

Nichtnegativität: $x_1, \quad x_2 \geq 0$

$u_1, \quad u_2, \quad u_3 \geq 0$

1. Restriktion: $+ 1x_1 + 2x_2 + 1u_1 = 400$

2. Restriktion: $+ 2x_1 + 2x_2 + 1u_2 = 500$

3. Restriktion: $+ 2x_1 + 1x_2 + 1u_3 = 400$

Zielfunktion: $+ 320x_1 + 320x_2 =$ z -> Maximum

Anfangstableau: * = Basisvariable

	x_1	x_2	$*u_1$	$*u_2$	$*u_3$	|	b	z
1. Restriktion:	1	2	1	0	0	|	400	0
2. Restriktion:	2	2	0	1	0	|	500	0
3. Restriktion:	2	1	0	0	1	|	400	0
Zielfunktion:	320	320	0	0	0	|	0	1

Ecke: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $u_1 = 400$, $u_2 = 500$, $u_3 = 400$, z = 0

1. Schritt: Pivotzeile = 3, Pivotspalte = 1: 2*(*1*) - 1*(*3*) / 1*(*2*) - 1*(*3*) / 1*(*Z*) - 160*(*3*) /

	$*x_1$	x_2	$*u_1$	$*u_2$	u_3	|	b	z
1. Restriktion:	0	3	2	0	-1	|	400	0
2. Restriktion:	0	1	0	1	-1	|	100	0
3. Restriktion:	2	1	0	0	1	|	400	0
Zielfunktion:	0	160	0	0	-160	|	-64000	1

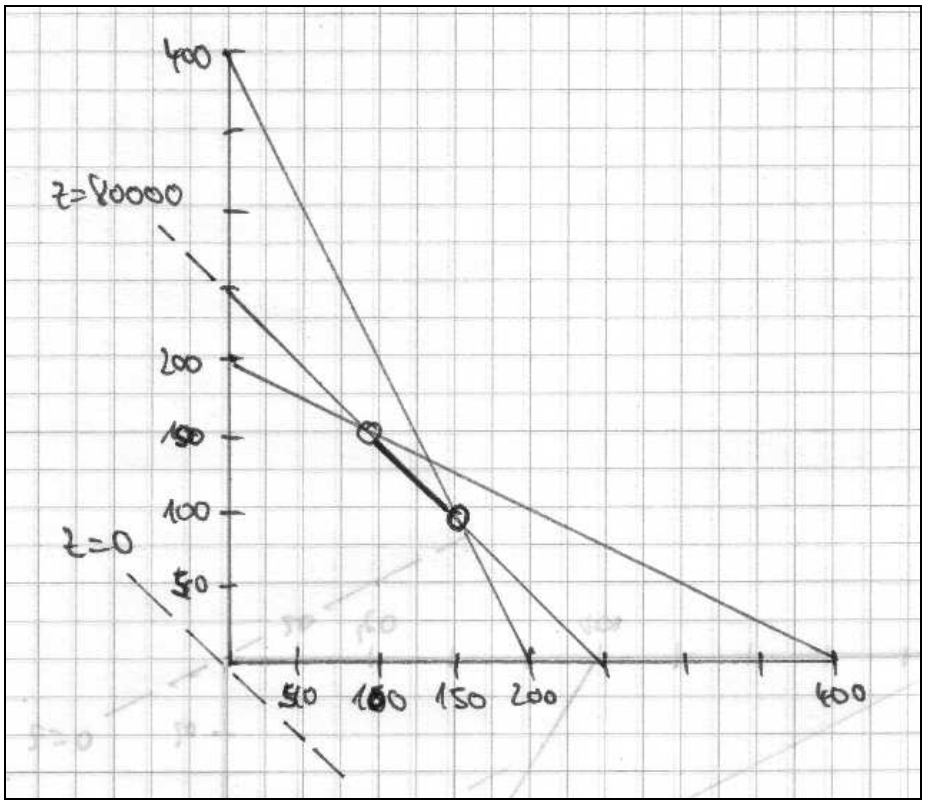
Ecke: $x_1 = 200$, $x_2 = 0$, $u_1 = 200$, $u_2 = 100$, $u_3 = 0$, z = 64000

2. Schritt: Pivotzeile = 2, Pivotspalte = 2: 1*(*1*) - 3*(*2*) / 1*(*3*) - 1*(*2*) / 1*(*Z*) - 160*(*2*) /

	$*x_1$	$*x_2$	$*u_1$	u_2	u_3	|	b	z
1. Restriktion:	0	0	2	-3	2	|	100	0
2. Restriktion:	0	1	0	1	-1	|	100	0
3. Restriktion:	2	0	0	-1	2	|	300	0
Zielfunktion:	0	0	0	-160	0	|	-80000	1

Ecke: $x_1 = 150$, $x_2 = 100$, $u_1 = 50$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, z = 80000

Optimale Ecke (als Teil einer mehrdeutigen Lösung): $x_1 = 150$, $x_2 = 100$, $u_1 = 50$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, z = 80000



7. (Zweidimensionales) lineares Optimierungsproblem: 2 Variablen, 3 Restriktion(en), Nichtnegativitätsbedingungen, Zielfunktion

Nichtnegativität: x_1, $x_2 \geq 0$

1. Restriktion: $+ 15x_1 + 45x_2 \leq 450$

2. Restriktion: $+ 40x_1 + 40x_2 \leq 480$

3. Restriktion: $+ 68x_1 + 34x_2 \leq 476$

Zielfunktion: $+ 40x_1 + 30x_2 =$ z -> Maximum

Lösung: Einführung von Schlupfvariablen: 3 Schlupfvariable(n)

Nichtnegativität: x_1, $x_2 \geq 0$

u_1, u_2, $u_3 \geq 0$

1. Restriktion: $+ 15x_1 + 45x_2 + 1u_1 = 450$

2. Restriktion: $+ 40x_1 + 40x_2 + 1u_2 = 480$

3. Restriktion: $+ 68x_1 + 34x_2 + 1u_3 = 476$

Zielfunktion: $+ 40x_1 + 30x_2 =$ z -> Maximum

Anfangstableau: * = Basisvariable

	x_1	x_2	$*u_1$	$*u_2$	$*u_3$	b	z
1. Restriktion:	15	45	1	0	0	450	0
2. Restriktion:	40	40	0	1	0	480	0
3. Restriktion:	68	34	0	0	1	476	0
Zielfunktion:	40	30	0	0	0	0	1

Ecke: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $u_1 = 450$, $u_2 = 480$, $u_3 = 476$, z = 0

1. Schritt: Pivotzeile = 3, Pivotspalte = 1: 68*(*1*) - 15*(*3*) / 17*(*2*) - 10*(*3*) / 17*(*Z*) - 10*(*3*) /

	$*x_1$	x_2	$*u_1$	$*u_2$	u_3	b	z
1. Restriktion:	0	2550	68	0	-15	23460	0
2. Restriktion:	0	340	0	17	-10	3400	0
3. Restriktion:	68	34	0	0	1	476	0
Zielfunktion:	0	170	0	0	-10	-4760	17

Ecke: $x_1 = 7$, $x_2 = 0$, $u_1 = 345$, $u_2 = 200$, $u_3 = 0$, z = 280

2. Schritt: Pivotzeile = 1, Pivotspalte = 2: 15*(*2*) - 2*(*1*) / 75*(*3*) - 1*(*1*) / 15*(*Z*) - 1*(*1*) /

	$*x_1$	$*x_2$	u_1	$*u_2$	u_3	b	z
1. Restriktion:	0	2550	68	0	-15	23460	0
2. Restriktion:	0	0	-136	255	-120	4080	0
3. Restriktion:	5100	0	-68	0	90	12240	0
Zielfunktion:	0	0	-68	0	-135	-94860	255

Ecke: $x_1 = 2.4$, $x_2 = 9.2$, $u_1 = 0$, $u_2 = 16$, $u_3 = 0$, z = 372

Optimale Ecke: $x_1 = 2.4$, $x_2 = 9.2$, $u_1 = 0$, $u_2 = 16$, $u_3 = 0$, z = 372

8. (Zweidimensionales) lineares Optimierungsproblem: 2 Variablen, 3 Restriktion(en), Nichtnegativitätsbedingungen, Zielfunktion

Nichtnegativität: $x_1, \quad x_2 \geq 0$

1. Restriktion: $+ 1x_1 + 1x_2 \leq 30$

2. Restriktion: $+ 1x_2 \leq 15$

3. Restriktion: $+ 1x_1 + 2x_2 \leq 40$

Zielfunktion: $+ 12x_1 + 18x_2 =$ z -> Maximum

Lösung: Einführung von Schlupfvariablen: 3 Schlupfvariable(n)

Nichtnegativität: $x_1, \quad x_2 \geq 0$

$u_1, \quad u_2, \quad u_3 \geq 0$

1. Restriktion: $+ 1x_1 + 1x_2 + 1u_1 = 30$

2. Restriktion: $+ 1x_2 + 1u_2 = 15$

3. Restriktion: $+ 1x_1 + 2x_2 + 1u_3 = 40$

Zielfunktion: $+ 12x_1 + 18x_2 =$ z -> Maximum

Anfangstableau: * = Basisvariable

	x_1	x_2	$*u_1$	$*u_2$	$*u_3$	b	z
1. Restriktion:	1	1	1	0	0	30	0
2. Restriktion:	0	1	0	1	0	15	0
3. Restriktion:	1	2	0	0	1	40	0
Zielfunktion:	12	18	0	0	0	0	1

Ecke: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $u_1 = 30$, $u_2 = 15$, $u_3 = 40$, z = 0

1. Schritt: Pivotzeile = 2, Pivotspalte = 2: 1*(*1*) - 1*(*2*) / 1*(*3*) - 2*(*2*) / 1*(*Z*) - 18*(*2*) /

	x_1	$*x_2$	$*u_1$	u_2	$*u_3$	b	z
1. Restriktion:	1	0	1	-1	0	15	0
2. Restriktion:	0	1	0	1	0	15	0
3. Restriktion:	1	0	0	-2	1	10	0
Zielfunktion:	12	0	0	-18	0	-270	1

Ecke: $x_1 = 0$, $x_2 = 15$, $u_1 = 15$, $u_2 = 0$, $u_3 = 10$, z = 270

2. Schritt: Pivotzeile = 3, Pivotspalte = 1: 1*(*1*) - 1*(*3*) / 1*(*Z*) - 12*(*3*) /

	$*x_1$	$*x_2$	$*u_1$	u_2	u_3	b	z
1. Restriktion:	0	0	1	1	-1	5	0
2. Restriktion:	0	1	0	1	0	15	0
3. Restriktion:	1	0	0	-2	1	10	0
Zielfunktion:	0	0	0	6	-12	-390	1

Ecke: $x_1 = 10$, $x_2 = 15$, $u_1 = 5$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, z = 390

3. Schritt: Pivotzeile = 1, Pivotspalte = 2: 1*(*2*) - 1*(*1*) / 1*(*3*) + 2*(*1*) / 1*(*Z*) - 6*(*1*) /

	$*x_1$	$*x_2$	u_1	$*u_2$	u_3	b	z
1. Restriktion:	0	0	1	1	-1	5	0
2. Restriktion:	0	1	-1	0	1	10	0
3. Restriktion:	1	0	2	0	-1	20	0
Zielfunktion:	0	0	-6	0	-6	-420	1

Ecke: $x_1 = 20$, $x_2 = 10$, $u_1 = 0$, $u_2 = 5$, $u_3 = 0$, z = 420

Optimale Ecke: $x_1 = 20$, $x_2 = 10$, $u_1 = 0$, $u_2 = 5$, $u_3 = 0$, z = 420

9. (Dreidimensionales) lineares Optimierungsproblem: 3 Variablen, 3 Restriktion(en), Nichtnegativitätsbedingungen, Zielfunktion

Nichtnegativität: $x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0$

1. Restriktion: $+ 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 \leq 400$

2. Restriktion: $+ 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 \leq 800$

3. Restriktion: $+ 1x_1 + 1x_2 \leq 260$

Zielfunktion: $+ 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 =$ z -> Maximum

Lösung: Einführung von Schlupfvariablen: 3 Schlupfvariable(n)

Nichtnegativität: $x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0$

$u_1, \quad u_2, \quad u_3 \geq 0$

1. Restriktion: $+ 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1u_1 = 400$

2. Restriktion: $+ 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 1u_2 = 800$

3. Restriktion: $+ 1x_1 + 1x_2 + 1u_3 = 260$

Zielfunktion: $+ 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 =$ z -> Maximum

Anfangstableau: * = Basisvariable

	x_1	x_2	x_3	$*u_1$	$*u_2$	$*u_3$	b	z
1. Restriktion:	1	1	1	1	0	0	400	0
2. Restriktion:	2	3	1	0	1	0	800	0
3. Restriktion:	1	1	0	0	0	1	260	0
Zielfunktion:	2	1	1	0	0	0	0	1

Ecke: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $u_1 = 400$, $u_2 = 800$, $u_3 = 260$, z = 0

1. Schritt: Pivotzeile = 3, Pivotspalte = 1: 1*(*1*) - 1*(*3*) / 1*(*2*) - 2*(*3*) / 1*(*Z*) - 2*(*3*) /

	$*x_1$	x_2	x_3	$*u_1$	$*u_2$	u_3	b	z
1. Restriktion:	0	0	1	1	0	-1	140	0
2. Restriktion:	0	1	1	0	1	-2	280	0
3. Restriktion:	1	1	0	0	0	1	260	0
Zielfunktion:	0	-1	1	0	0	-2	-520	1

Ecke: $x_1 = 260$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $u_1 = 140$, $u_2 = 280$, $u_3 = 0$, z = 520

2. Schritt: Pivotzeile = 1, Pivotspalte = 3: 1*(*2*) - 1*(*1*) / 1*(*Z*) - 1*(*1*) /

	$*x_1$	x_2	$*x_3$	u_1	$*u_2$	u_3	b	z
1. Restriktion:	0	0	1	1	0	-1	140	0
2. Restriktion:	0	1	0	-1	1	-1	140	0
3. Restriktion:	1	1	0	0	0	1	260	0
Zielfunktion:	0	-1	0	-1	0	-1	-660	1

Ecke: $x_1 = 260$, $x_2 = 0$, $x_3 = 140$, $u_1 = 0$, $u_2 = 140$, $u_3 = 0$, z = 660

Optimale Ecke: $x_1 = 260$, $x_2 = 0$, $x_3 = 140$, $u_1 = 0$, $u_2 = 140$, $u_3 = 0$, z = 660

10. (Dreidimensionales) <u>lineares Optimierungsproblem</u>: 2 Variablen, 3 Restriktion(en), Nichtnegativitätsbedingungen, Zielfunktion

Nichtnegativität: $x_1, \quad x_2 \geq 0$

1. Restriktion: $+ 2x_1 + 10x_2 \leq 70$

2. Restriktion: $+ 6x_1 + 6x_2 \leq 66$

3. Restriktion: $+ 10x_1 + 5x_2 \leq 90$

Zielfunktion: $+ 15x_1 + 10x_2 = z$ -> Maximum

<u>Lösung</u>: <u>Einführung von Schlupfvariablen</u>: 3 Schlupfvariable(n)

Nichtnegativität: $x_1, \quad x_2 \geq 0$

$u_1, \quad u_2, \quad u_3 \geq 0$

1. Restriktion: $+ 2x_1 + 10x_2 + 1u_1 = 70$

2. Restriktion: $+ 6x_1 + 6x_2 + 1u_2 = 66$

3. Restriktion: $+ 10x_1 + 5x_2 + 1u_3 = 90$

Zielfunktion: $+ 15x_1 + 10x_2 = z$ -> Maximum

<u>Anfangstableau</u>: * = Basisvariable

	x_1	x_2	$*u_1$	$*u_2$	$*u_3$	b	z
1. Restriktion:	2	10	1	0	0	70	0
2. Restriktion:	6	6	0	1	0	66	0
3. Restriktion:	10	5	0	0	1	90	0
Zielfunktion:	15	10	0	0	0	0	1

Ecke: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $u_1 = 70$, $u_2 = 66$, $u_3 = 90$, z = 0

<u>1. Schritt</u>: Pivotzeile = 3, Pivotspalte = 1: 5*(*1*) - 1*(*3*) / 5*(*2*) - 3*(*3*) / 2*(*Z*) - 3*(*3*) /

	$*x_1$	x_2	$*u_1$	$*u_2$	u_3	b	z
1. Restriktion:	0	45	5	0	-1	260	0
2. Restriktion:	0	15	0	5	-3	60	0
3. Restriktion:	10	5	0	0	1	90	0
Zielfunktion:	0	5	0	0	-3	-270	2

Ecke: $x_1 = 9$, $x_2 = 0$, $u_1 = 52$, $u_2 = 12$, $u_3 = 0$, z = 135

<u>2. Schritt</u>: Pivotzeile = 2, Pivotspalte = 2: 1*(*1*) - 3*(*2*) / 3*(*3*) - 1*(*2*) / 3*(*Z*) - 1*(*2*) /

	$*x_1$	$*x_2$	$*u_1$	u_2	u_3	b	z
1. Restriktion:	0	0	5	-15	8	80	0
2. Restriktion:	0	15	0	5	-3	60	0
3. Restriktion:	30	0	0	-5	6	210	0
Zielfunktion:	0	0	0	-5	-6	-870	6

Ecke: $x_1 = 7$, $x_2 = 4$, $u_1 = 16$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, z = 145

<u>Optimale Ecke</u>: $x_1 = 7$, $x_2 = 4$, $u_1 = 16$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, z = 145

11. (Zweidimensionales) <u>lineares Optimierungsproblem</u>: 2 Variablen, 3 Restriktion(en), Nichtnegativitätsbedingungen, Zielfunktion

Nichtnegativität: $x_1, \quad x_2 \geq 0$

1. Restriktion: $+ 15x_1 + 45x_2 \leq 450$

2. Restriktion: $+ 40x_1 + 40x_2 \leq 480$

3. Restriktion: $+ 68x_1 + 34x_2 \leq 476$

Zielfunktion: $+ 40x_1 + 30x_2 = z$ -> Maximum

Lösung: Einführung von Schlupfvariablen: 3 Schlupfvariable(n)

Nichtnegativität: $x_1, \quad x_2 \geq 0$

$u_1, \quad u_2, \quad u_3 \geq 0$

1. Restriktion: $+ 15x_1 + 45x_2 + 1u_1 = 450$

2. Restriktion: $+ 40x_1 + 40x_2 + 1u_2 = 480$

3. Restriktion: $+ 68x_1 + 34x_2 + 1u_3 = 476$

Zielfunktion: $+ 40x_1 + 30x_2 = z$ -> Maximum

Anfangstableau: * = Basisvariable

	x_1	x_2	$*u_1$	$*u_2$	$*u_3$	b	z
1. Restriktion:	15	45	1	0	0	450	0
2. Restriktion:	40	40	0	1	0	480	0
3. Restriktion:	68	34	0	0	1	476	0
Zielfunktion:	40	30	0	0	0	0	1

Ecke: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $u_1 = 450$, $u_2 = 480$, $u_3 = 476$, z = 0

1. Schritt: Pivotzeile = 3, Pivotspalte = 1: 68*(*1*) - 15*(*3*) / 17*(*2*) - 10*(*3*) / 17*(*Z*) - 10*(*3*) /

	$*x_1$	x_2	$*u_1$	$*u_2$	u_3	b	z
1. Restriktion:	0	2550	68	0	-15	23460	0
2. Restriktion:	0	340	0	17	-10	3400	0
3. Restriktion:	68	34	0	0	1	476	0
Zielfunktion:	0	170	0	0	-10	-4760	17

Ecke: $x_1 = 7$, $x_2 = 0$, $u_1 = 345$, $u_2 = 200$, $u_3 = 0$, z = 280

2. Schritt: Pivotzeile = 1, Pivotspalte = 2: 15*(*2*) - 2*(*1*) / 75*(*3*) - 1*(*1*) / 15*(*Z*) - 1*(*1*) /

	$*x_1$	$*x_2$	u_1	$*u_2$	u_3	b	z
1. Restriktion:	0	2550	68	0	-15	23460	0
2. Restriktion:	0	0	-136	255	-120	4080	0
3. Restriktion:	5100	0	-68	0	90	12240	0
Zielfunktion:	0	0	-68	0	-135	-94860	255

Ecke: $x_1 = 2.4$, $x_2 = 9.2$, $u_1 = 0$, $u_2 = 16$, $u_3 = 0$, z = 372

Optimale Ecke: $x_1 = 2.4$, $x_2 = 9.2$, $u_1 = 0$, $u_2 = 16$, $u_3 = 0$, z = 372

12. (Zweidimensionales) lineares Optimierungsproblem: 2 Variablen, 3 Restriktion(en), Nichtnegativitätsbedingungen, Zielfunktion

Nichtnegativität: $x_1, \quad x_2 \geq 0$

1. Restriktion: $+ 2x_1 + 10x_2 \leq 70$

2. Restriktion: $+ 6x_1 + 6x_2 \leq 66$

3. Restriktion: $+ 10x_1 + 5x_2 \leq 90$

Zielfunktion: $+ 15x_1 + 10x_2 = z$ -> Maximum

Lösung: Einführung von Schlupfvariablen: 3 Schlupfvariable(n)

Nichtnegativität: $x_1, \quad x_2 \geq 0$

$u_1, \quad u_2, \quad u_3 \geq 0$

1. Restriktion: $+ 2x_1 + 10x_2 + 1u_1 = 70$

2. Restriktion: $+ 6x_1 + 6x_2 + 1u_2 = 66$

3. Restriktion: $+ 10x_1 + 5x_2 + 1u_3 = 90$

Zielfunktion: $+ 15x_1 + 10x_2 = z$ -> Maximum

Anfangstableau: * = Basisvariable

	x_1	x_2	$*u_1$	$*u_2$	$*u_3$	b	z
1. Restriktion:	2	10	1	0	0	70	0
2. Restriktion:	6	6	0	1	0	66	0
3. Restriktion:	10	5	0	0	1	90	0
Zielfunktion:	15	10	0	0	0	0	1

Ecke: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $u_1 = 70$, $u_2 = 66$, $u_3 = 90$, z = 0

1. Schritt: Pivotzeile = 3, Pivotspalte = 1: 5*(*1*) - 1*(*3*) / 5*(*2*) - 3*(*3*) / 2*(*Z*) - 3*(*3*) /

	$*x_1$	x_2	$*u_1$	$*u_2$	u_3	b	z
1. Restriktion:	0	45	5	0	-1	260	0
2. Restriktion:	0	15	0	5	-3	60	0
3. Restriktion:	10	5	0	0	1	90	0
Zielfunktion:	0	5	0	0	-3	-270	2

Ecke: $x_1 = 9$, $x_2 = 0$, $u_1 = 52$, $u_2 = 12$, $u_3 = 0$, z = 135

2. Schritt: Pivotzeile = 2, Pivotspalte = 2: 1*(*1*) - 3*(*2*) / 3*(*3*) - 1*(*2*) / 3*(*Z*) - 1*(*2*) /

	$*x_1$	$*x_2$	$*u_1$	u_2	u_3	b	z
1. Restriktion:	0	0	5	-15	8	80	0
2. Restriktion:	0	15	0	5	-3	60	0
3. Restriktion:	30	0	0	-5	6	210	0
Zielfunktion:	0	0	0	-5	-6	-870	6

Ecke: $x_1 = 7$, $x_2 = 4$, $u_1 = 16$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, z = 145

Optimale Ecke: $x_1 = 7$, $x_2 = 4$, $u_1 = 16$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, z = 145

13. Ein Unternehmen stellt die Produkte A, B und C auf den Maschinen M1 und M2 her. Maximal können im Monat insgesamt 1200 Produkte hergestellt werden. Hinsichtlich der Maschinen wird bei einer Fünftagewoche und vier Wochen im Monat von einem Einschichtbetrieb mit 8 Stunden täglich ausgegangen. Die Herstellzeiten betragen pro Produkt und Maschine (in Minute/Stück):

A: M1 4, M2: 10; B: M1: 6, M2: 4; C: M1: 12, M2: 5.

a) Wie lautet der Produktionsplan des Unternehmens, wenn der Erlös maximiert werden soll und Preise von € 4,-, € 4,50 und € 5,- für die Produkte A, B und C erzielt werden können?

b) Von Produkt A sollen jetzt genau 300 Stück im Monat hergestellt werden. Wie lautet nun unter gleichen Voraussetzungen der optimale Produktionsplan?

c) Unter der Voraussetzung der Produktion von 300 Mengeneinheiten von Produkt A erhöht sich nun der Erlös von Produkt B auf € 6,- pro Stück. Zeige, dass sich dann die Produktion des Produktes C nicht mehr lohnt.

Lösung: a) Lineares Optimierungsproblem: 3 Variablen, 3 Restriktion(en), Nichtnegativitätsbedingungen, Zielfunktion

Nichtnegativität:		x_1,		x_2,		x_3 ≥	0
1. Restriktion:	+	$1x_1$ +		$1x_2$ +		$1x_3$ ≤	1200
2. Restriktion:	+	$4x_1$ +		$6x_2$ +		$12x_3$ ≤	9600
3. Restriktion:	+	$10x_1$ +		$4x_2$ +		$5x_3$ ≤	9600
Zielfunktion:	+	$4x_1$ +		$4.5x_2$ +		$5x_3$ =	z -> Maximum

Einführung von Schlupfvariablen: 3 Schlupfvariable(n)

Nichtnegativität:		x_1,		x_2,		x_3 ≥	0		
		u_1,		u_2,		u_3 ≥	0		
1. Restriktion:	+	$1x_1$ +		$1x_2$ +		$1x_3$ +	$1u_1$		= 1200
2. Restriktion:	+	$4x_1$ +		$6x_2$ +		$12x_3$	+	$1u_2$	= 9600
3. Restriktion:	+	$10x_1$ +		$4x_2$ +		$5x_3$	+	$1u_3$	= 9600
Zielfunktion:	+	$4x_1$ +		$4.5x_2$ +		$5x_3$ =	z -> Maximum		

Anfangstableau: * = Basisvariable

	x_1	x_2	x_3	$*u_1$	$*u_2$	$*u_3$	b	z
1. Restriktion:	1	1	1	1	0	0	1200	0
2. Restriktion:	4	6	12	0	1	0	9600	0
3. Restriktion:	10	4	5	0	0	1	9600	0
Zielfunktion:	4	4.5	5	0	0	0	0	1

Ecke: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $u_1 = 1200$, $u_2 = 9600$, $u_3 = 9600$, z = 0

1. Schritt: Pivotzeile = 2, Pivotspalte = 3: 12*(*1*) - 1*(*2*) / 12*(*3*) - 5*(*2*) / 12*(*Z*) - 5*(*2*) /

	x_1	x_2	$*x_3$	$*u_1$	u_2	$*u_3$	b	z
1. Restriktion:	8	6	0	12	-1	0	4800	0
2. Restriktion:	4	6	12	0	1	0	9600	0
3. Restriktion:	100	18	0	0	-5	12	67200	0
Zielfunktion:	28	24	0	0	-5	0	-48000	12

Ecke: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 800$, $u_1 = 400$, $u_2 = 0$, $u_3 = 5600$, z = 4000

2. Schritt: Pivotzeile = 1, Pivotspalte = 1: 2*(*2*) - 1*(*1*) / 2*(*3*) - 25*(*1*) / 2*(*Z*) - 7*(*1*) /

	$*x_1$	x_2	$*x_3$	u_1	u_2	$*u_3$		b	z
1. Restriktion:	8	6	0	12	-1	0	|	4800	0
2. Restriktion:	0	6	24	-12	3	0	|	14400	0
3. Restriktion:	0	-114	0	-300	15	24	|	14400	0
Zielfunktion:	0	6	0	-84	-3	0	|	-129600	24

Ecke: $x_1 = 600$, $x_2 = 0$, $x_3 = 600$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 600$, z = 5400

3. Schritt: Pivotzeile = 1, Pivotspalte = 2: 1*(*2*) - 1*(*1*) / 1*(*3*) + 19*(*1*) / 1*(*Z*) - 1*(*1*) /

	x_1	$*x_2$	$*x_3$	u_1	u_2	$*u_3$		b	z
1. Restriktion:	8	6	0	12	-1	0	|	4800	0
2. Restriktion:	-8	0	24	-24	4	0	|	9600	0
3. Restriktion:	152	0	0	-72	-4	24	|	105600	0
Zielfunktion:	-8	0	0	-96	-2	0	|	-134400	24

Ecke: $x_1 = 0$, $x_2 = 800$, $x_3 = 400$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 4400$, z = 5600

Optimale Ecke: $x_1 = 0$, $x_2 = 800$, $x_3 = 400$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 4400$, z = 5600

b) Lineares Optimierungsproblem: 2 Variablen, 3 Restriktion(en), Nichtnegativitätsbedingungen, Zielfunktion

Nichtnegativität:		x_2,		x_3	≥	0	
1. Restriktion:	+	$1x_2$	+	$1x_3$	≤	900	
2. Restriktion:	+	$6x_2$	+	$12x_3$	≤	8400	
3. Restriktion:	+	$4x_2$	+	$5x_3$	≤	6600	
Zielfunktion:	+	$4.5x_2$	+	$5x_3$	=	z + 1200	-> Maximum

Einführung von Schlupfvariablen: 3 Schlupfvariable(n)

Nichtnegativität:		x_2,		x_3	≥	0						
		u_1,		u_2,				u_3	≥		0	
1. Restriktion:	+	$1x_2$	+	$1x_3$	+			$1u_1$			=	900
2. Restriktion:	+	$6x_2$	+	$12x_3$			+		$1u_2$		=	8400
3. Restriktion:	+	$4x_2$	+	$5x_3$					+	$1u_3$	=	6600
Zielfunktion:	+	$4.5x_2$	+	$5x_3$	=	z - 1200	-> Maximum					

Anfangstableau: * = Basisvariable

	x_2	x_3	$*u_1$	$*u_2$	$*u_3$		b	z
1. Restriktion:	1	1	1	0	0	|	900	0
2. Restriktion:	6	12	0	1	0	|	8400	0
3. Restriktion:	4	5	0	0	1	|	6600	0
Zielfunktion:	4.5	5	0	0	0	|	-1200	1

Ecke: $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $u_1 = 900$, $u_2 = 8400$, $u_3 = 6600$, z = 1200

1. Schritt: Pivotzeile = 2, Pivotspalte = 2: 12*(*1*) - 1*(*2*) / 12*(*3*) - 5*(*2*) / 12*(*Z*) - 5*(*2*) /

	x_2	$*x_3$	$*u_1$	u_2	$*u_3$		b	z
1. Restriktion:	6	0	12	-1	0	|	2400	0
2. Restriktion:	6	12	0	1	0	|	8400	0
3. Restriktion:	18	0	0	-5	12	|	37200	0
Zielfunktion:	24	0	0	-5	0	|	-56400	12

Ecke: $x_3 = 0$, $x_3 = 700$, $u_1 = 200$, $u_2 = 0$, $u_3 = 3100$, z = 4700

2. Schritt: Pivotzeile = 1, Pivotspalte = 1: 1*(*2*) - 1*(*1*) / 1*(*3*) - 3*(*1*) / 1*(*Z*) - 4*(*1*) /

	$*x_2$	$*x_3$	u_1	u_2	$*u_3$		b	z
1. Restriktion:	6	0	12	-1	0	|	2400	0
2. Restriktion:	0	12	-12	2	0	|	6000	0
3. Restriktion:	0	0	-36	-2	12	|	30000	0
Zielfunktion:	0	0	-48	-1	0	|	-66000	12

Ecke: $x_2 = 400$, $x_3 = 500$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 2500$, z = 5500

Optimale Ecke: $x_2 = 400$, $x_3 = 500$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 2500$, z = 5500

c) Lineares Optimierungsproblem: 2 Variablen, 3 Restriktion(en), Nichtnegativitätsbedingungen, Zielfunktion

Nichtnegativität:	x_2,		x_3 ≥			0	
1. Restriktion:	+ $1x_2$	+	$1x_3$ ≤			900	
2. Restriktion:	+ $6x_2$	+	$12x_3$ ≤			8400	
3. Restriktion:	+ $4x_2$	+	$5x_3$ ≤			6600	
Zielfunktion:	+ $6x_2$	+	$5x_3$ =	z	+	1200	-> Maximum

Einführung von Schlupfvariablen: 3 Schlupfvariable(n)

Nichtnegativität:	x_2,		x_3 ≥			0			
	u_1,		u_2,			u_3 ≥		0	
1. Restriktion:	+ $1x_2$	+	$1x_3$ +		$1u_1$			=	900
2. Restriktion:	+ $6x_2$	+	$12x_3$	+		$1u_2$		=	8400
3. Restriktion:	+ $4x_2$	+	$5x_3$			+	$1u_3$	=	6600
Zielfunktion:	+ $6x_2$	+	$5x_3$ =	z	-	1200	-> Maximum		

Anfangstableau: * = Basisvariable

	x_2	x_3	$*u_1$	$*u_2$	$*u_3$	|	b	z
1. Restriktion:	1	1	1	0	0	|	900	0
2. Restriktion:	6	12	0	1	0	|	8400	0
3. Restriktion:	4	5	0	0	1	|	6600	0
Zielfunktion:	6	5	0	0	0	|	-1200	1

Ecke: $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $u_1 = 900$, $u_2 = 8400$, $u_3 = 6600$, z = 1200

1. Schritt: Pivotzeile = 1, Pivotspalte = 1: 1*(*2*) - 6*(*1*) / 1*(*3*) - 4*(*1*) / 1*(*Z*) - 6*(*1*) /

	$*x_2$	x_3	u_1	$*u_2$	$*u_3$	|	b	z
1. Restriktion:	1	1	1	0	0	|	900	0
2. Restriktion:	0	6	-6	1	0	|	3000	0
3. Restriktion:	0	1	-4	0	1	|	3000	0
Zielfunktion:	0	-1	-6	0	0	|	-6600	1

Ecke: $x_2 = 900$, $x_3 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 3000$, $u_3 = 3000$, z = 6600

Optimale Ecke: $x_2 = 900$, $x_3 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 3000$, $u_3 = 3000$, z = 6600