

Mathematik- Abiturprüfung > Analysis IV

Einleitung: Die Mathematik-Abiturprüfung für (allgemein bildende, berufliche) Gymnasien beinhaltet die Themenbereiche Analysis, analytische Geometrie und Wahrscheinlichkeitsrechnung, jeweils gegliedert in Aufgaben ohne und mit Hilfsmitteln (wissenschaftlicher Taschenrechner, Merkhilfe/Formelsammlung). Im Bereich der Analysis betreffen die Aufgaben Themen wie Gleichungslehre, ganz und gebrochen rationale, natürliche Exponential- und trigonometrische Funktionen, Differentiation und Integration, grafisches Auf- und Ableiten, Modellierung (einschließlich Extremwertaufgaben), Parameterfunktionen. Nachstehend findet sich eine Aufgabe zum mündlichen Abitur (Hauptaufgabe: Analysis).

Aufgabe (mit Hilfsmitteln): Gegeben ist eine ganz rationale Funktion $f(x)$.

a) Ordne mit Begründung den Graphen in den Abbildungen A, B, C die Funktion $f(x)$, die 1. Ableitungsfunktion $f'(x)$ und die Stammfunktion $F(x)$ zu.

Nun ist $f(x) = 4x^2 - x^3$ als ganz rationale Funktion gegeben.

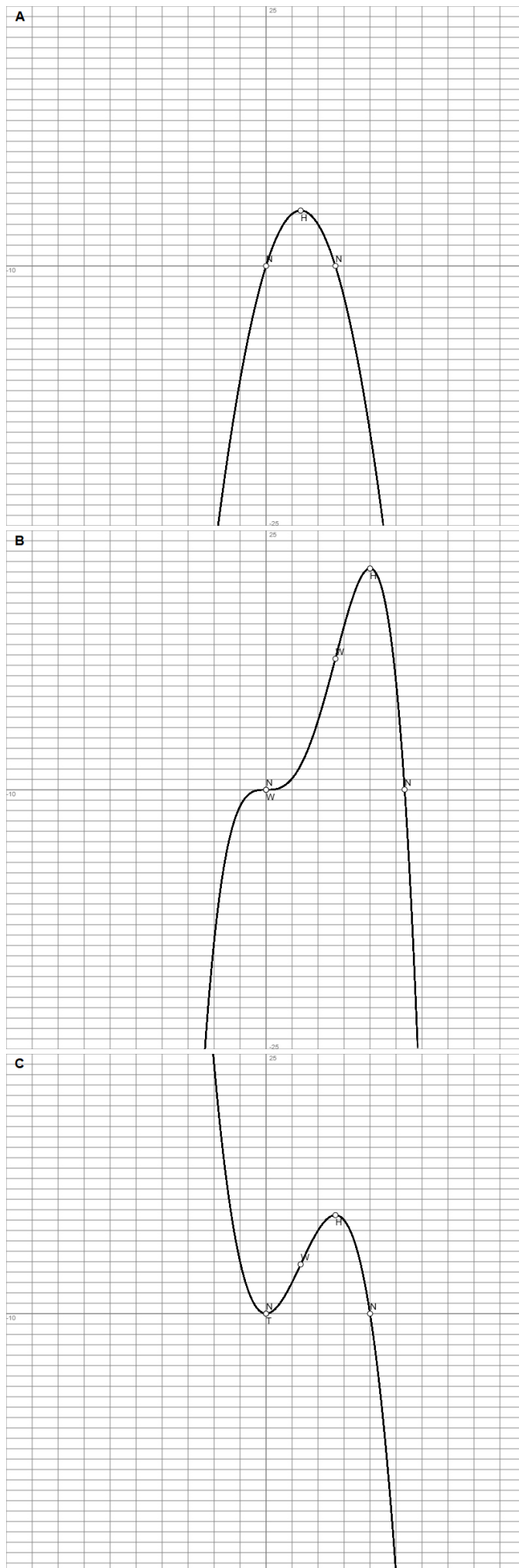
b) Berechne den Inhalt der Fläche zwischen Funktion $f(x)$ und x-Achse im 1. Quadranten des x-y-Koordinatensystems. Erläutere die Vorgehensweise!

c) Eine vorgegebene Exponentialfunktion

$g(x) = ae^{\frac{1}{2}x+2} + b$ schneidet die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = 4$; die Steigung der Funktion $g(x)$ beträgt dort $m = -1$. Bestimme die Koeffizienten a, b .

Es ist $g(x) = 2 \left(e^{\frac{1}{2}x+2} - 1 \right)$.

d) Die Tangente an die Funktion $g(x)$ an der Stelle $x = 4$ schneidet die Asymptote der Exponentialfunktion im Schnittpunkt S. Erläutere die Begriffe „Tangente“ und „Asymptote“. Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes S.



Lösungen: a) Es gilt (nicht zuletzt aufgrund der NEW-Regel, des grafischen Auf- und Ableitens):

$f'(x)$: A, $f(x)$: C, $F(x)$: B

z.B. wegen:

$f'(x)$: Nullstelle $N(0|0)$ mit Vorzeichenwechsel von - nach + $\rightarrow f(x)$: Tiefpunkt/Nullstelle $T(0|0) \rightarrow F(x)$: Sattelpunkt $W(0|0)$

$f(x)$: Nullstelle $N(4|0)$ mit Vorzeichenwechsel von + nach - $\rightarrow F(x)$: Hochpunkt an der Stelle $x=4$

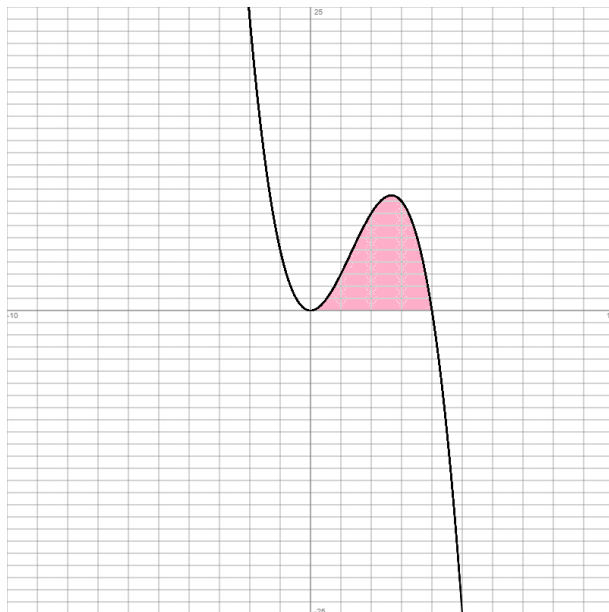
$F(x)$: Wendestelle bei $x=8/3$ mit Übergang von Links- zur Rechtskrümmung $\rightarrow f(x)$: Hochpunkt bei $x=8/3 \rightarrow f'(x)$: Nullstelle bei $x=8/3$ mit Vorzeichenwechsel von + nach -

$f'(x)$: $f'(x) \geq 0$ auf $[0; 8/3] \rightarrow f(x)$: $f(x)$ monoton steigend auf $[0; 8/3] \rightarrow F(x)$: $F(x)$ links gekrümmt auf $[0; 8/3]$

usw.

b) Fläche = Flächensaldo = bestimmtes Integral, wenn $f(x) \geq 0$ auf Integrationsbereich (1. Quadrant) $\rightarrow f(x) = 4x^2 - x^3$ mit Nullstellen $N_1(0|0)$ und $N_2(4|0) \rightarrow$ Integrationsbereich $[0; 4] \rightarrow$ bestimmtes Integral als Flächeninhalt

$$A = \int_0^4 (4x^2 - x^3) dx = [4x^3/3 - x^4/4]_0^4 = 256/3 - 256/4 = 64/3 \text{ FE.}$$

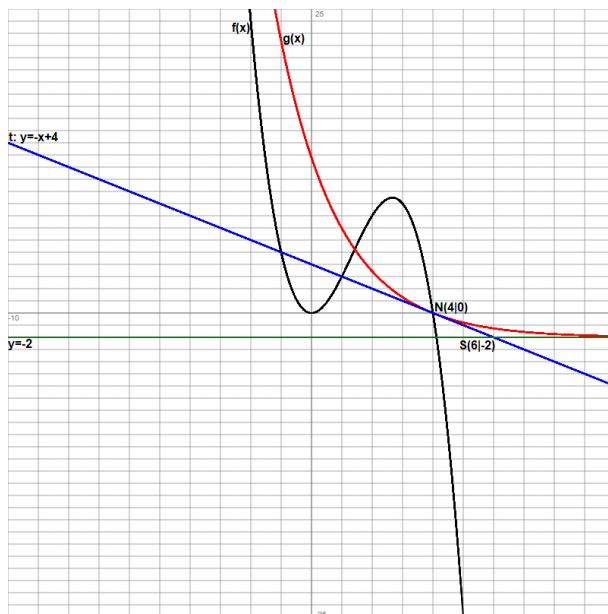


c) Bestimmungsaufgabe: $g(x) = ae^{-0,5x+2} + b \Rightarrow g'(x) = -0,5ae^{-0,5x+2} \rightarrow$ Steigung $m = -1 = g'(4) = -0,5ae^0 = -0,5a \Leftrightarrow a=2$
 $g(x) = 2e^{-0,5x+2} + b \rightarrow$ Schnittpunkt $N(4|0)$ mit: $0 = g(4) = 2e^0 + b = 2 + b \Leftrightarrow b=-2$
 und damit: $g(x) = 2e^{-0,5x+2} - 2 = 2(e^{-0,5x+2} - 1)$.

d) I. Tangente an eine Funktion $f(x)$ an einer Stelle $x_0 \rightarrow t: y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$ oder: $t: y = mx+c$ mit: $m = f'(x_0)$, $c = f(x_0) - mx_0 \rightarrow$ Funktion und Tangente stimmen in Funktionswert und Ableitung überein (Tangente und Ableitung bzw. Steigung) $\rightarrow$ Tangentengleichung: an $g(x)$ an $x_0=4$: $g(4) = 0$, $g'(4) = -1$ (siehe Aufgabe c)) $\rightarrow t: y = -x+4$.

II. Asymptote als Grenzgerade einer Funktion, hier mit: $x \rightarrow +\infty$: $g(x) \rightarrow -2 = y$ als waagerechte Asymptote.

III. Schnittpunktberechnung: Tangente = Asymptote $\rightarrow -x+4 = -2 \Leftrightarrow -x = -6 \Leftrightarrow x=6 \rightarrow$ Schnittpunkt (auf Asymptote: $y=-2$) $S(6|-2)$.



(FE = Flächeneinheiten)