

Mathematik-Abiturprüfung

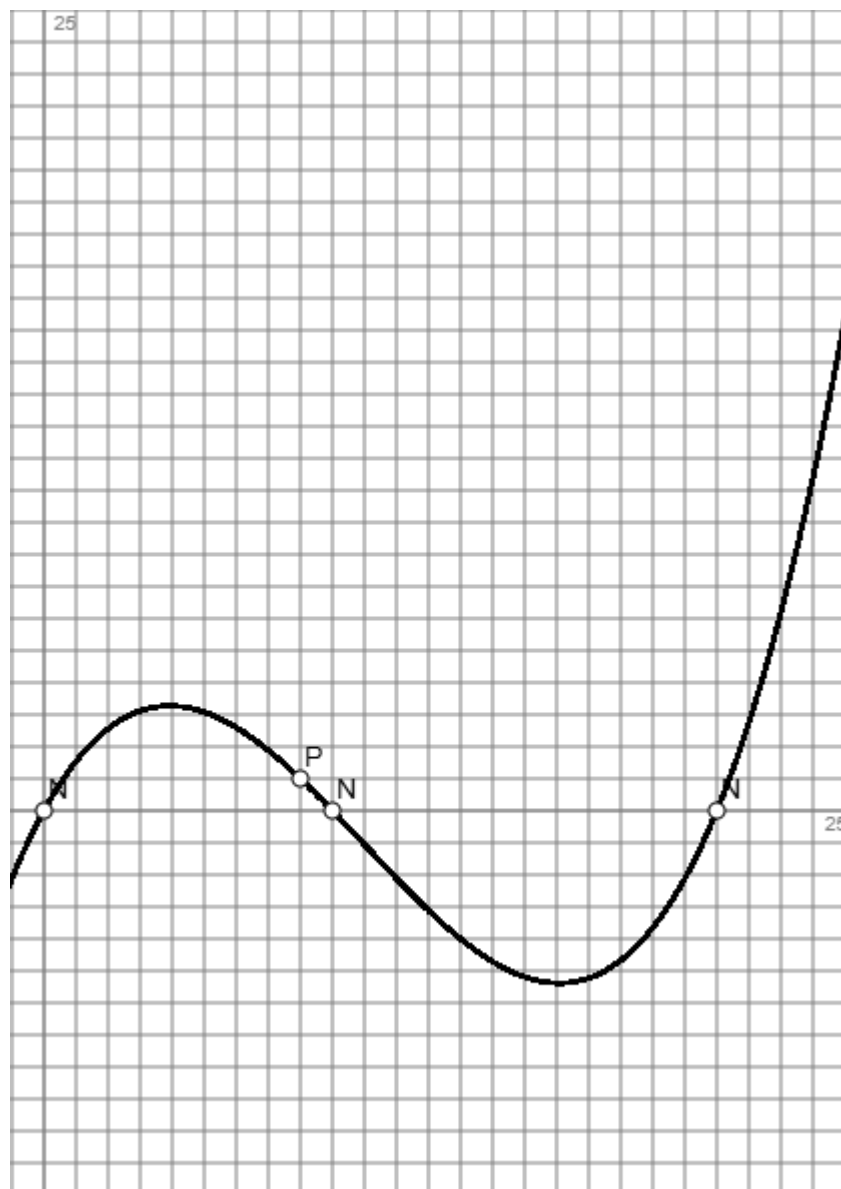
> Analysis V

Einleitung: Die Mathematik-Abiturprüfung für (allgemein bildende, berufliche) Gymnasien beinhaltet die Themenbereiche Analysis, analytische Geometrie bzw. Matrizenrechnung und Wahrscheinlichkeitsrechnung, jeweils gegliedert in Aufgaben ohne und mit Hilfsmitteln (wissenschaftlicher Taschenrechner, Merkhilfe/Formelsammlung). Im Bereich der Analysis betreffen die Aufgaben Themen wie Gleichungslehre, ganz und gebrochen rationale, natürliche Exponential- und trigonometrische Funktionen, Differentiation und Integration, grafisches Auf- und Ableiten, Modellierung (einschließlich Extremwertaufgaben), Parameterfunktionen.

Nachstehend findet sich eine Aufgabe zum mündlichen Abitur (Hauptaufgabe: Analysis; verbesserte Aufgabe auf der Grundlage von: Stark. Mündliches Abitur. Prüfungsaufgaben mit Lösungen. Gymnasium Baden-Württemberg. Mathematik BF, o.O. 2020, S.63-66: Musteraufgabe 6).

Aufgabe (mit Hilfsmitteln): In ein bzw. aus einem Reservoir fließt innerhalb von 24 Stunden Wasser hinzu bzw. ab. Zu Beobachtungsbeginn befinden sich 50 m^3 Wasser im Reservoir.

a) Die Zu- bzw. Abflussrate des Wassers wird beschrieben durch die nachstehend abgebildete Funktion $f(t)$ (m^3/h) ($0 \leq t \leq 24$).



Beantworte die folgenden Fragen:

1. Zu welchem Zeitpunkt befindet sich eine maximale Wassermenge im Reservoir?
2. In welchem Zeitraum nimmt die Wassermenge im Reservoir ab?
3. Wie groß ist die Abflussrate des Wassers zum Zeitpunkt $t = 11$?
4. Wann nimmt die Wassermenge im Reservoir am stärksten ab?
5. Wann ist die Wassermenge im Reservoir am geringsten?
6. Hat die Wassermenge im Reservoir nach 24 Stunden insgesamt ab- oder zugenommen?

b) Die Funktion $f(t)$ ist eine Funktion 3. Grades mit den Nullstellen $t = 0$, $t = 9$ und $t = 21$, deren Graph durch den Punkt $P(8|1)$ verläuft. Bestimme eine Funktionsgleichung von $f(t)$.

Es ist $f(t) = \frac{1}{104}(t^3 - 30t^2 + 189t)$.

c) Berechne mit Hilfe eines Integrals die maximale Wassermenge im Reservoir.

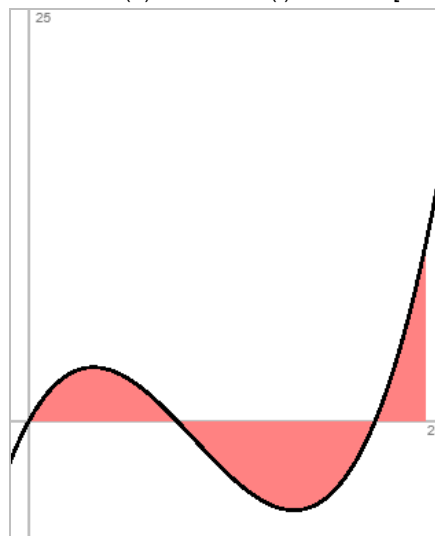
d) Zeige oder widerlege: Eine ganz rationale Funktion $g(x)$, die einzig die drei Nullstellen $x = 0$, $x = 9$ und $x = 21$ besitzt, ist eine Funktion 3. Grades und damit ein reelles Vielfaches der Funktion $f(x)$.

(h = Stunde, m^3 = Kubikmeter)

Lösungen: a) $f(t)$ = Änderungsrate = Zu-/Abfluss von Wasser, $F(t)$ = Bestand = Wassermenge im Reservoir = $50 + \int_0^t f(x)dx$; Antworten: 1. $t=9$ ($t=24$: $F(9) > F(24)$); 2. $9 < t < 21$; 3. $f(11) = -2 \text{ m}^3/\text{h}$; 4. $f(t) \rightarrow$ Tiefpunkt $T(16|f(16)) \rightarrow$ stärkste Abflussrate $f(16)$; 5. $t=21$; 6. $F(0) = 50 > F(24) \rightarrow$ Abnahme der Wassermenge ($\leftrightarrow F(0) = 50 \text{ m}^3$, $F(9) = 69,28 \text{ m}^3$, $F(21) = 27,38 \text{ m}^3$, $F(24) = 41,69 \text{ m}^3$).

b) Linearfaktorzerlegung einer ganz rationalen Funktion auf der Grundlage der Nullstellen: $f(t) = a(t-0)(t-9)(t-21) \rightarrow$ Punkt $P(8|1)$: $1 = a \cdot 8 \cdot (-1) \cdot (-13) = 104a \Leftrightarrow a = 1/104 \rightarrow f(t) = t(t-9)(t-21)/104$.

c) Maximale Wassermenge im Reservoir bei $t=9$: $F(9) = 50 + \int_0^9 f(t)dt = 50 + [t^4/4 - 10t^3 + 94,5t^2]_0^9 = 50 + 19,28 = 69,28 \text{ m}^3$.



d) Widerlegung $\leftrightarrow$ Gegenbeispiel: $g(x) = x^2(x-9)^3(x-21)^4/104$ mit den einzigen Nullstellen 0, 9, 21 und deren Vielfachheiten 2, 3, 4 als ganz rationale Funktion 9. Grades in Linearfaktorzerlegung; es gilt: $g(x) \neq k \cdot f(x)$ für jedes reelle k .

www.michael-buhlmann.de / 06.2026 / Mathematik-Abiturprüfung: Analysis V / Aufgabe 2613