Michael Buhlmann

Mathematik-Fachabiturprüfung
> Analysis I

Einleitung: Die Mathematik-Fachabiturprüfung beinhaltet den Themenbereich Analysis, gegliedert in Aufgaben ohne und mit Hilfsmitteln (wissenschaftlicher Taschenrechner, Merkhilfe/Formelsammlung). Im Bereich der Analysis betreffen die Aufgaben Themen wie Gleichungslehre, ganz rationale Funktionen, Differentiation und Integration, Bestimmungsaufgaben, Extremwertaufgaben.

Aufgabe 1 (ohne Hilfsmittel):

a) Die Funktion $f(x)=\frac{3}{4}x^3+3x^2+\frac{3}{4}x-\frac{9}{2}$ besitzt die Nullstelle x = 1. Berechne die übrigen Nullstellen von f(x).

b) Bestimme die Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$x_1 = x_2 + x_3 + 2$$
$$x_2 = x_1 + x_3 + 4$$
$$x_3 = -x_1 - x_2.$$

c) Mit der Funktionenschar $f_t(x)=x^2+2tx-t^2$ mit reellem Scharparameter t sind für t = -1 und t = 2 die entsprechenden Funktionsgraphen in ein geeignetes x-y-Koordinatensystem einzuzeichnen und die Koordinaten des Schnittpunktes zwischen beiden Funktionen zu berechnen.

d) Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x)=-\frac{2}{3}\left(x^3-6ax+3a^2\right)$ mit reellem Scharparameter a. Berechne die ersten drei Ableitungen der Funktionen aus der Funktionenschar.

Aufgabe 2 (mit Hilfsmitteln): Gegeben ist eine ganz rationale Funktion f(x) vom Grad 4 mit: $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2-5$.

a) Weise die Symmetrie der Funktion f(x) nach und bestimme das Verhalten der Funktion f(x) für $x \to \pm\infty$.

b) Berechne die Nullstellen der Funktion f(x) (Runden auf zwei Nachkommastellen).

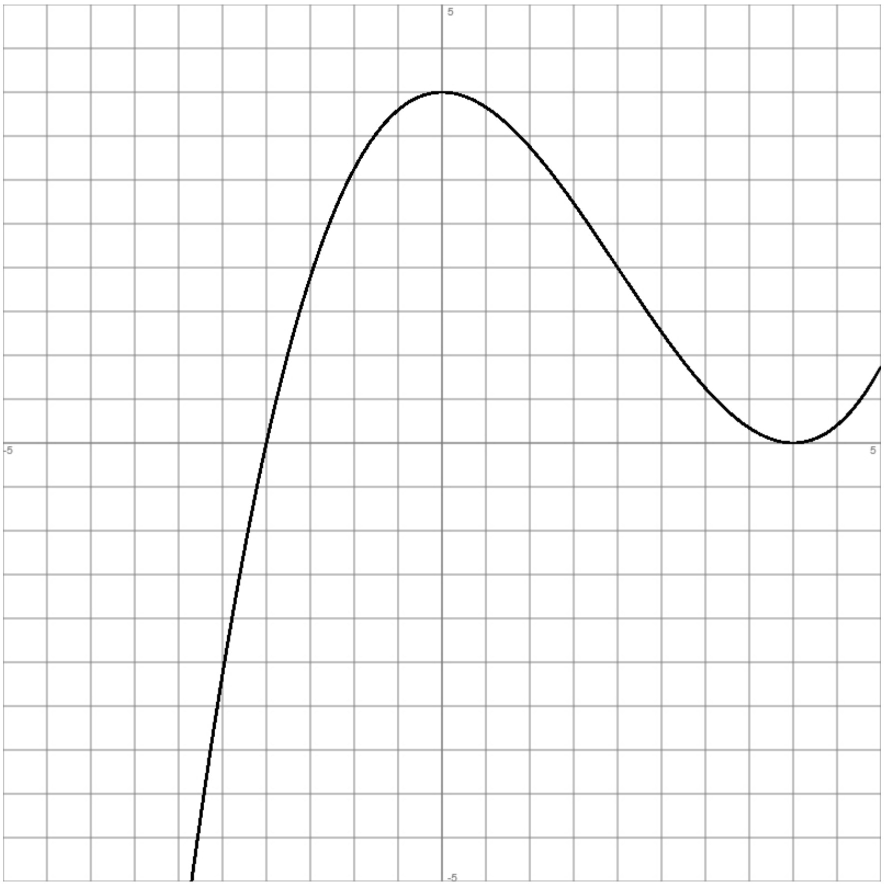
c) Berechne alle Extrempunkte der Funktion f(x).

d) Zeige, dass an den Stellen x = $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ Wendepunkte der Funktion f(x) vorliegen.

e) Im Punkt P(-1|f(-1)) ist die Tangente und die Normale an die Funktion f(x) zu bestimmen. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks, das Tangente und Normale zusammen mit der x-Achse bilden.

f) Zeichne die Funktion f(x), die Tangente und die Normale in ein geeignetes x-y-Koordinatensystem.

Aufgabe 3 (mit Hilfsmitteln): a) Eine ganz rationale Funktion f(x) vom Grad 3 besitzt die Nullstellen N(-2|0) und N(4|0). Dies ist dem nachstehenden Graphen zu entnehmen, ebenso dass die Funktion die y-Achse bei y = 4 schneidet.



Bestimme den Funktionsterm von f(x).

Es sei im Folgenden $f(x) = \frac{1}{8}\left(x^3 - 6x^2 + 32\right)$.

b) Zeige, dass der Graph der Funktion f(x) auf der y-Achse einen Hochpunkt besitzt.

c) Berechne Wendepunkt und Wendetangente der Funktion f(x).

d) Im 1. Quadranten des x-y-Koordinatensystems befindet sich ein achsenparalleles Rechteck mit dem Ursprung O(0|0) und dem Punkt Q(u|f(u)) auf der Funktion f(x) als Eckpunkten. Für welches u hat dieses Rechteck einen maximalen Umfang? Bestimme für dieses umfangmaximale Rechteck alle Eckpunkte O, P, Q, R.

Lösungen: 1a) $f(x) = 0 \rightarrow x^3+4x^2+x-6 = 0 \rightarrow$ Polynomdivision: $(x^3+4x^2+x-6):(x-1) = x^2+5x+6 = 0 \rightarrow x=-3,\ x=-2$ als Nullstellen; b) Lineares Gleichungssystem (nach Umformen):

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$$\begin{array}{rrrrrrrr} + & 1x_1 & - & 1x_2 & - & 1x_3 & = & 2 \\ - & 1x_1 & + & 1x_2 & - & 1x_3 & = & 4 \\ + & 1x_1 & + & 1x_2 & + & 1x_3 & = & 0 \end{array}$$

<u>Anfangstableau</u>:

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

<u>1. Schritt</u>: 1*(*2*) + 1*(*1*) / 1*(*3*) - 1*(*1*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{array}$$

<u>Zeilentausch</u>: (*2*) <-> (*3*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{array}$$

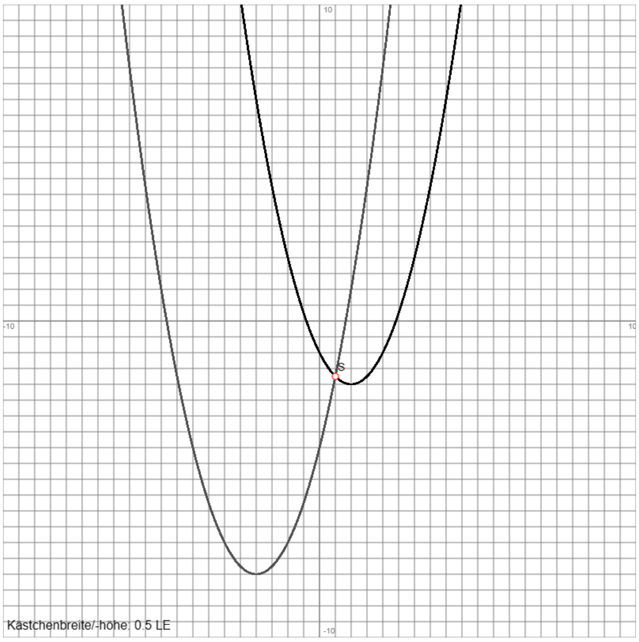
<u>Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$$\begin{array}{rrrrrrrr} + & 1x_1 & - & 1x_2 & - & 1x_3 & = & 2 \\ & & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -2 \\ & & & & - & 2x_3 & = & 6 \end{array}$$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

$x_3 = -3$
$x_2 = 2$
$x_1 = 1$

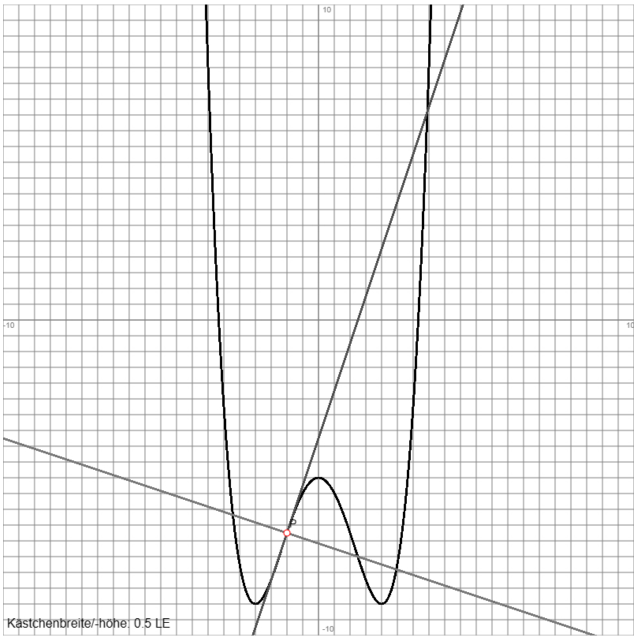
c) Graphen der Funktionen $f_{-1}(x) = x^2-2x-1$, $f_2(x) = x^2+4x-4$:



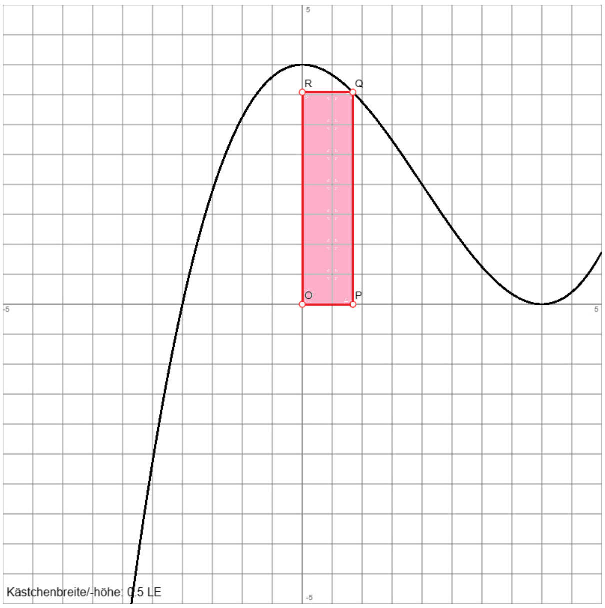
Schnittpunkt: $f_{-1}(x) = f_2(x) \rightarrow x^2-2x-1 = x^2+4x-4 \rightarrow -2x-1 = 4x-4 \rightarrow 3 = 6x \rightarrow x = 0{,}5$ mit $y=-1{,}75 \rightarrow S(0{,}5|-1{,}75)$.

d) $f_a(x) = -2(x^3-6ax+3a^2)/3 = -2x^3/3+4ax-2a^2 \rightarrow f_a'(x) = -2x^2+4a$, $f_a''(x) = -4x$, $f_a'''(x) = -4$.

2a) $f(x) = 0{,}25x^4-2x^2-5$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse; $x \rightarrow \pm\infty$: $f(x) \rightarrow +\infty$; b) $f(x) = 0$ (Substitution) -> Nullstellen $N(-3{,}16|0)$, $N(3{,}16|0)$; c) $f'(x) = x^3-4x = 0 \rightarrow$ Tiefpunkte $T(-2|-9)$, $T(2|-9)$, Hochpunkt $H(0|-5)$; d) $f''(x) = 3x^2-4 = 0 \rightarrow x = \pm 2/\sqrt{3}$ als Wendepunkte mit $f'''(\pm 2/\sqrt{3}) \neq 0$; e) $x_0 = -1 \rightarrow$ Punkt $P(-1|-6{,}75) \rightarrow$ Tangente $t: y = 3x-3{,}75$, Normale $n: y = -x/3-85/12 \rightarrow$ Nullstellen von Tangente und Normale: $N(-85/4|0)$, $N(1{,}25|0) \rightarrow$ Dreieckfläche $A = 0{,}5\cdot 22{,}5\cdot 6{,}75 = 75{,}9375$ FE; f) Graphen von Funktion, Tangente, Normale ▶



3a) Nullstellen $N(-2|0)$, $N(4|0)$, y-Achsenabschnittpunkt $S_y(0|4) \rightarrow f(x) = (x+2)(x-4)^2/8 = (x^3-6x^2+32)/8$; b) $f'(x) = (3x^2-12x)/8 = 0 \rightarrow$ Hochpunkt $H(0|4)$; c) $f''(x) = (6x-12)/8 = 0 \rightarrow$ Wendepunkt $W(2|2) \rightarrow$ Wendetangente $t: y = -1{,}5x+5$; d) Umfangsfunktion $U(u) = 2u+2f(u) = u^3/4-1{,}5u^2+2u+8$, $0 \leq u \leq 4 \rightarrow U'(u) = 3u^2/4-3u+2 = 0 \rightarrow u = 0{,}845$, $u = 3{,}155 \rightarrow$ Vergleich der Umfänge: $U(0) = 8$, $U(0{,}845) = 8{,}77$, $U(3{,}155) = 7{,}23$, $U(4) = 8 \rightarrow$ globales Maximum bei $u = 0{,}845 \rightarrow$ umfangmaximales Rechteck $O(0|0)$, $P(0{,}845|0)$, $Q(0{,}845|3{,}54)$, $R(0|3{,}54)$ ▼



(FE = Flächeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 02.2023 / Mathematik-Fachabiturprüfung: Analysis I / Aufgaben 1782-1784