Michael Buhlmann

Mathematik-Fachabiturprüfung

> Aufgaben zur Analysis I

Einleitung: Die Mathematik-Fachabiturprüfung beinhaltet den Themenbereich Analysis, gegliedert in Aufgaben ohne und mit Hilfsmitteln (wissenschaftlicher Taschenrechner, Merkhilfe/Formelsammlung). Im Bereich der Analysis betreffen die Aufgaben Themen wie Gleichungslehre, ganz rationale Funktionen, Differentiation und Integration, Bestimmungsaufgaben, Extremwertaufgaben.

Aufgabe 1 (ohne Hilfsmittel):

a) Berechne die Lösungen der Gleichung:

$$x^4 + 5x^2 = 36.$$

b) Leite die Funktion f(x) ab und fasse die Ableitung zusammen:

$$f(x) = \frac{4}{5}x(x-1)^2 .$$

c) Berechne die Tangente an die Parabel $f(x) = -0{,}5x^2 + 6x + 1$ an der Stelle $x_0 = 2$.

d) Ermittle Koordinaten und Art des einzigen Extrempunktes der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 2 .$$

e) Bestimme den Hoch- und Tiefpunkt der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5 .$$

f) Bestimme die Wendepunkte der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 12x^2 + 7x + 11 .$$

g) Berechne das Integral:

$$\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{2}x^2 + 3\right)dx .$$

h) Berechne den Inhalt der von der Funktion $f(x) = 2x^2 - x^3$ und der x-Achse eingeschlossenen Fläche.

Lösungen: 1a) x = -2, x = 2; b) $f(x) = 0{,}8x^3 - 1{,}6x^2 + 0{,}8x$ -> $f'(x) = 2{,}4x^2 - 3{,}2x + 0{,}8$; c) f(2) = 11, f'(2) = 4 -> Tangente: y = 4x+3; d) Extremstellen: f'(x) = 0 -> [x = 0; Sattelpunkt], x = 3 -> f''(3)>0 -> Tiefpunkt T(3|-1,375); e) $f'(x) = 0{,}75x^2 - 3x = 0$ -> Hochpunkt H(0|5), Tiefpunkt T(4|-3); f) $f'(x) = 2x^3 - 24x + 7$, $f''(x) = 6x^2 - 24 = 0$ -> Wendepunkte W(-2|-43), W(2|-15); g) y-Achsensymmetrie der Funktion f(x), Stammfunktion $F(x) = x^3/6 + 3x$ -> Integral $\int_{-2}^{2}(x^2/2+3)dx = 2\cdot\int_{0}^{2}(x^2/2+3)dx = 44/3$; h) f(x) = 0 -> Nullstellen N(0|0), N(2|0), Stammfunktion $F(x) = 2x^3/3 - x^4/4$ -> Flächeninhalt $A = \int_{0}^{2} f(x)dx = 4/3$ FE.

Aufgabe 2 (ohne Hilfsmittel):

a) Berechne die Lösungen der Gleichung:

$$\frac{1}{2}x^3 = 3{,}5x - 3x^2 .$$

b) Bestimme die Nullstellen der Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{5}x^3 - 2x^2$$

sowie das Verhalten von f(x) für x -> ±∞. Skizziere den Graphen der Funktion.

c) Weise die Symmetrie nach und bestimme die Art der Symmetrie der Funktion

$$f(x) = \frac{2}{7}x^5 - 12x^3 + \frac{9}{5}x .$$

d) Leite die Funktion f(x) ab und fasse die Ableitung zusammen:

$$f(x) = \frac{7}{3}x^5 + \frac{2}{5}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x + 2 .$$

e) Ermittle die Stellen mit waagerechter Tangente für die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3}{8}(6 - \frac{1}{2}x) .$$

f) Zeige: Der Punkt H(2|32) ist ein Hochpunkt der Funktion

$$f(x) = -x^4 + 4x^2 + 16 .$$

g) Berechne die Wendetangente der Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x^2 - 6x + 5 .$$

h) Berechne das unbestimmte Integral von

$$f(x) = \frac{1}{8}x^2(x-4) .$$

Lösungen: 2a) x = -7, x = 0, x = 1; b) f(x) = 0 -> Nullstellen x = -10 (1-fach), x = 0 (2-fach) , x->-∞: f(x)->+∞, x->+∞: f(x)->-∞; c) f(-x) = -f(x) -> Punktsymmetrie zum Ursprung O(0|0); d) f'(x) = $35x^4/3+6x^2/5-2x+0{,}5$; e) f(x) = $3x^3/4-x^4/16$ -> f'(x) = $9x^2/4-x^3/4 = 0$ -> Sattelpunkt an der Stelle x = 0, Hochpunkt an der Stelle x = 9; f) f(2) = 32, f'(2) = 0, f''(2) < 0 -> Hochpunkt H(2|32); g) f'(x) = $-0{,}75x^2+6x-6$, f''(x) = -1,5x+6 = 0 -> Wendepunkt W(4|13) mit Wendetangente y = 6x-11; h) f(x) = $(x^3-4x^2)/8$ -> $\int(x^3-4x^2)/8\cdot dx = x^4/32-x^3/6+C$.

Aufgabe 3 (ohne Hilfsmittel):

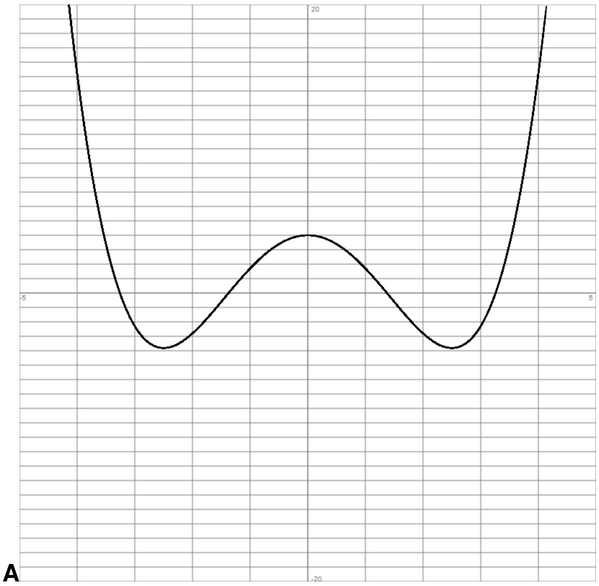
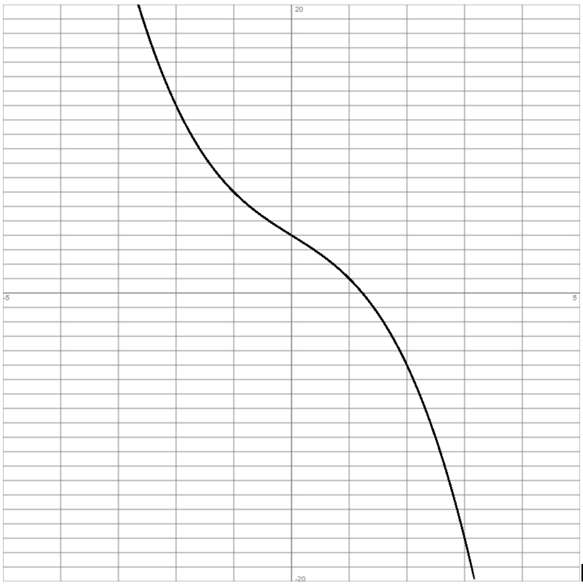
a) Berechne die Schnittpunkte zwischen den Funktionen

$$f(x) = x^4 + x^3 - 4,\ g(x) = x^3 - 3x^2$$

b) Begründe, warum die nachstehenden Graphen von Funktionen (A, B) nicht zur Funktion

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{2}x^2 + 4$$

passen.

A

B


c) Bestimme die Stellen der Funktionskurve von

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 10x + 5,$$

an denen der Graph der Funktion die Steigung 2 hat.

d) Zeige, dass die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2x + 6$$

keine Wendepunkte besitzt.

e) Die Tangente an die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 6x^2.$$

an der Stelle $x_0 = 1$ schneidet die Achsen des x-y-Koordinatensystems, so dass Achsen und Tangente ein Dreieck bilden. Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

f) Berechne das Integral

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^3 - 2x + 5 \right) dx.$$

g) Berechne den Inhalt der Fläche, die von der Funktion $f(x) = x^2 - 7x + 10$, der x- und der y-Achse eingeschlossen wird.

Lösungen: 3a) f(x) = g(x) -> Schnittpunkte P(-1|-4), Q(1|-2); b) A: f(x) ist nicht symmetrisch zur y-Achse, x->-∞: f(x)->-∞, B: x->-∞: f(x)->-∞, f(x) hat Stellen mit waagerechter Tangente; c) f'(x) = $2x^2$+x-10 = 2 -> Stellen x = -2,5, x = 2; d) f'(x) = $-x^3$-4x+2, f''(x) = $-3x^2$-4 $<$ 0 -> keine Wendepunkte; e) f(x) = $-0,5x^4+6x^2$, f'(x) = $-2x^3$+12x -> f(1) = 5,5, f'(1) = 10 -> Tangente y = 10x-4,5 -> Achsenschnittpunkte S_y(0|-4,5), N(0,45|0) -> Flächeninhalt des Dreiecks A = 4,5·0,45/2 = 1,0125 FE; g) Stammfunktion F(x) = x^4/8-x^2+5x -> Integral $_0\int^2$(x^3/2-2x+5)dx = 8; h) f(x) = 0 -> Nullstellen N(2|0), N(5|0), Stammfunktion F(x) = x^3/3-3,5x^2+10x -> Flächeninhalt A = $_0\int^2$ f(x)dx = 26/3 FE.

Aufgabe 4 (mit Hilfsmitteln): Als ganz rationale Funktion (Polynomfunktion) 3. Grades f(x) ist gegeben: $f(x) = x^3 - 3x^2$.

a) Gib die Nullstellen der Funktion f(x) an.

b) Berechne die Extrempunkte der Funktion f(x).

c) Berechne den Wendepunkt der Funktion f(x).

d) Bestimme die Wendetangente und deren Steigungswinkel.

e) Zeichne den Graphen der Funktion f(x) und der Wendetangente in geeignetes x-y-Koordinatensystem ein.

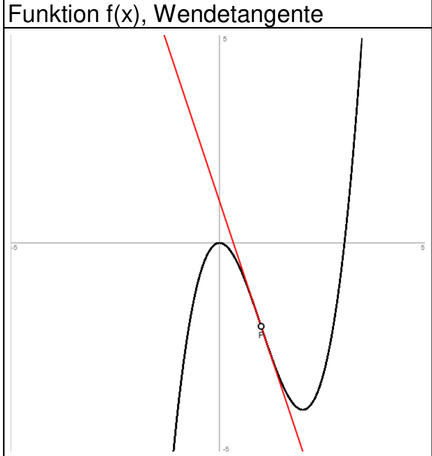
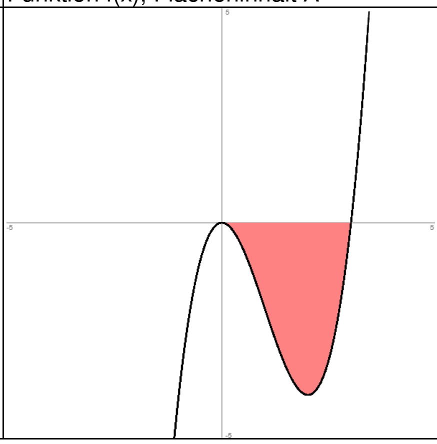
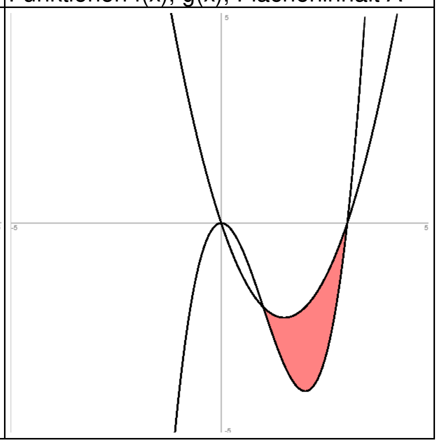
f) Berechne den Inhalt der zwischen der Funktion f(x) und der x-Achse eingeschlossenen Fläche.

g) Der Graph einer Normalparabel 2. Grades g(x) verläuft durch den Wendepunkt der Funktion f(x) und durch deren Nullstelle mit positiver x-Koordinate. Bestimme den Funktionsterm der Parabel g(x).

h) Bestimme den Tiefpunkt der Normalparabel g(x).

i) Berechne den Inhalt der zwischen den Funktionen f(x) und g(x) eingeschlossenen Fläche.

Lösungen: 4a) f(x) = 0 -> Nullstellen N(0|0), N(3|0); b) $f'(x) = 3x^2-6x = 0$ -> Hochpunkt H(0|0), Tiefpunkt T(2|-4); c) $f''(x) = 6x-6 = 0$ -> Wendepunkt W(1|-2); d) Wendetangente: y = -3x+1, Steigungswinkel: $\varphi = \tan^{-1}(-3) = -71{,}57°$; f) Stammfunktion $F(x) = x^4/4-x^3$ -> Flächeninhalt $A = -\int_0^3 f(x)dx = 13{,}5$ FE; g) Ansatz: $g(x) = x^2+bx+c$, Wendepunkt W(1|4), Nullstelle N(3|0) -> lineares Gleichungssystem: b+c = -3, 3b+c = -9 -> b = -3, c = 0 -> $g(x) = x^2-3x$; h) $g'(x) = 2x-3 = 0$ -> Tiefpunkt T(1,5|-2,25); i) $h(x) = f(x)-g(x) = x^3-4x^2+3x$ -> Stammfunktion $H(x) = x^4/4-4x^3/3+3x^2/2$ -> Flächeninhalt $A = \int_1^3 h(x)dx$ = 8/3 FE.

Aufgabe 4e): Funktion f(x), Wendetangente	Aufgabe 4f): Funktion f(x), Flächeninhalt A	Aufgabe 4i): Funktionen f(x), g(x), Flächeninhalt A
		

Aufgabe 5 (mit Hilfsmitteln): Als ganz rationale Funktion (Polynomfunktion) 3. Grades f(x) ist gegeben: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x$.

a) Weise die Symmetrie der Funktion f(x) nach sowie die Art der Symmetrie.

b) Zeige, dass die Gerade t_1: y = -5x – 18 eine Tangente an die Funktion f(x) im Punkt P(-3|f(-3)) ist.

c) Zeichne die Funktion f(x) und die Tangente t_1 in geeignetes x-y-Koordinatensystem ein.

d) Berechne die zur Tangente t_1 senkrecht stehende Tangente t_2 an die Funktion f(x), die durch den 1. Quadranten des Koordinatensystems läuft. Zeichne auch Tangente t_2 in das Koordinatensystem ein.

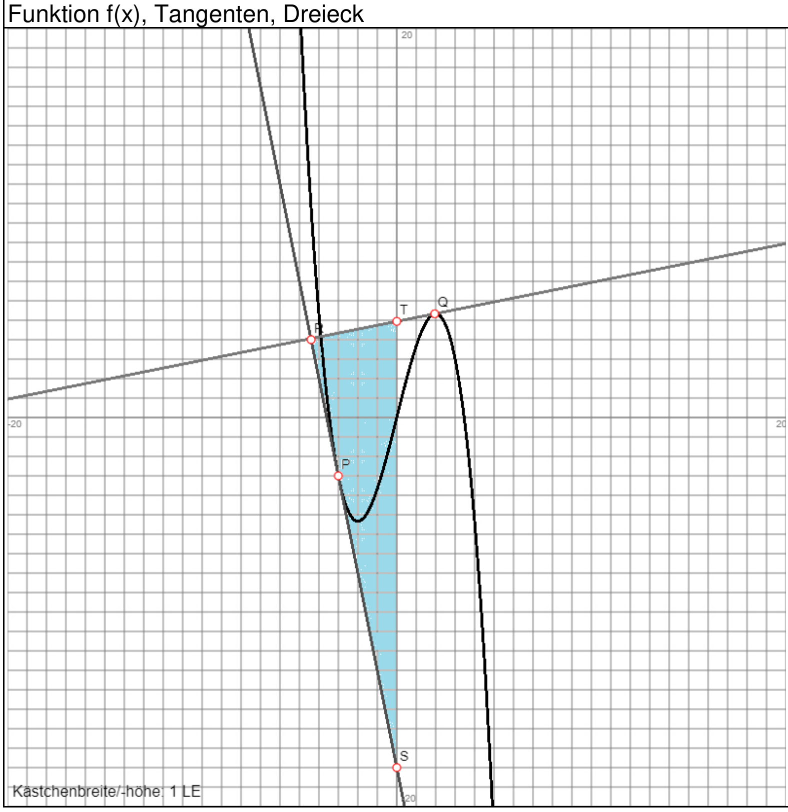
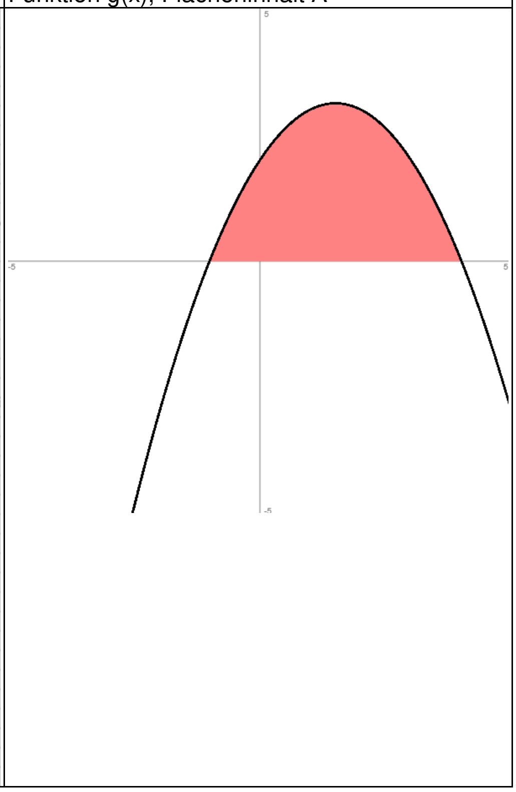
e) Die Tangenten t_1, t_2 bilden zusammen mit der y-Achse ein Dreieck. Berechne Umfang und Flächeninhalt dieses Dreiecks.

Eine andere ganz rationale Funktion (Polynomfunktion) g(x) ist eine Parabel 2. Grades.

f) Der Graph dieser Parabel 2. Grades g(x) verläuft durch die Punkte A(-2|-3), B(1|2), C(3|2). Bestimme den Funktionsterm.

g) Berechne den Flächeninhalt der zwischen der Funktion $g(x) = -0{,}5x^2 + 1{,}5x + 2$ und der x-Achse eingeschlossenen Fläche.

Lösungen: 5a) f(-x) = -f(x) -> Punktsymmetrie zum Ursprung; b) $f(x) = -x^3/3+4x$, $f'(x) = -x^2+4$, t_1: y = -5x-18, y' = -5 -> f(-3) = y(-3) = -3, f'(-3) = y'(-3) = -5 -> Punkt P(-3|-3) als Berührpunkt; d) Steigung der senkrechten Tangente t_2: m = 0,2 -> $f'(x) = -x^2+4 = 0{,}2$ -> Tangentenpunkt Q(1,95|5,33) -> Tangente t_2: y = 0,2x+4,94; e) Tangenten y = y -> Tangentenschnittpunkt R(-4,41|4,06), y-Achsenschnittpunkte der Tangenten S(0|-18), T(0|4,94) -> rechtwinkliges Dreieck ΔRST: Hypotenuse c = 22,94 LE, Katheten a = 4,5 LE, b = 22,5 LE -> Umfang u = 49,94 LE, Flächeninhalt A= 50,63 FE; f) $g(x) = ax^2+bx+c$ -> lineares Gleichungssystem: 4a-2b+c = -3, a+b+c = 2, 9a+3b+c = 2 -> a = -0,5, b = 1,5, c = 2 -> $g(x) = -0{,}5x^2+1{,}5x+2$; g) g(x) = 0 -> Nullstellen N(-1|0), N(4|0), Stammfunktion $G(x) = -x^3/6+3x^2/4+2x$ -> Flächeninhalt $A = \int_{-1}^{4} f(x)dx = 125/12 = 10\ 5/12$ FE.

Aufgabe 5c)-e): Funktion f(x), Tangenten, Dreieck	Aufgabe 5f)-g): Funktion g(x), Flächeninhalt A
	

Aufgabe 6 (mit Hilfsmitteln): Gegeben ist die nebenstehende Wertetabelle einer ganz rationalen Funktion 3. Grades f(x).

a) Bestimme aus der Tabelle die Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte der Funktion.

b) Bestimme den Funktionsterm.

c) Zeichne die Funktion in ein geeignetes x-y-Koordinatensystem.

d) Bestimme diejenigen Intervalle des Definitionsbereichs der Funktion, auf denen die Funktion monoton steigend ist.

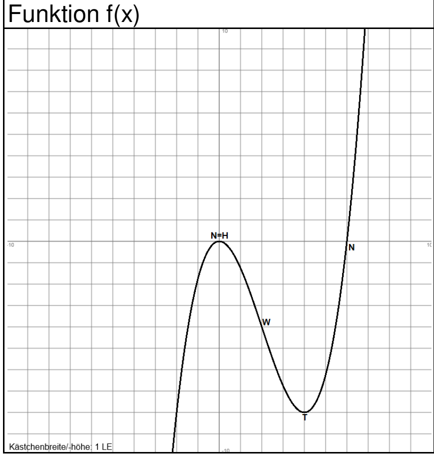
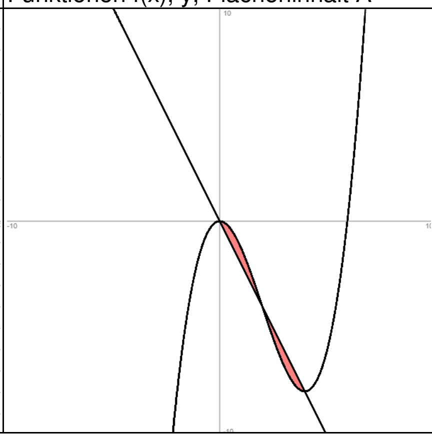
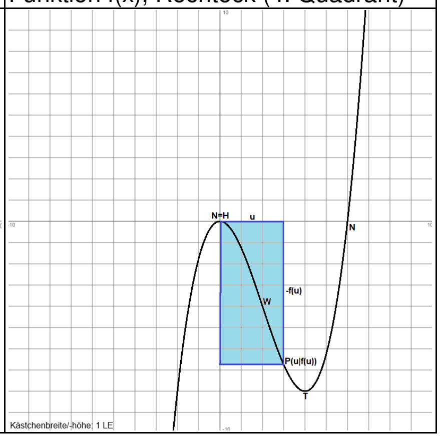
e) Die Gerade g schneidet die Funktion f(x) im Hoch- und Tiefpunkt der Funktion. Berechne den Inhalt der von Funktion und Geraden eingeschlossenen (Gesamt-) Fläche.

f) Im 4. Quadranten des x-y-Koordinatensystems liegt ein achsenparalleles Rechteck mit dem Ursprung O des Koordinatensystems und einem auf der Funktion f(x) befindlichem Punkt P als Ecken. Bestimme Breite, Höhe und Umfang des Rechtecks mit dem größten Flächeninhalt.

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)
-10	-400	105.25	-18
-9	-303.75	88	-16.5
-8	-224	72.25	-15
-7	-159.25	58	-13.5
-6	-108	45.25	-12
-5	-68.75	34	-10.5
-4	-40	24.25	-9
-3	-20.25	16	-7.5
-2	-8	9.25	-6
-1	-1.75	4	-4.5
0	0	0	-3
1	-1.25	-2	-1.5
2	-4	-2.75	0
3	-6.75	-2	1.5
4	-8	0	3
5	-6.25	4	4.5
6	0	9.25	6
7	12.25	16	7.5
8	32	24.25	9
9	60.75	34	10.5
10	100	45.25	12

Lösungen: 6a)-c) Nullstelle/Hochpunkt N/H(0|0), Wendepunkt W(2|-4), Tiefpunkt T(4|-8), N(6|0) -> $f(x) = x^2(x-6)/4$; d) Hochpunkt H(0|0), Tiefpunkt T(4|-8) -> Intervalle der steigenden Monotonie: (-∞; 0), (4; +∞); e) Hochpunkt H(0|0), Tiefpunkt T(4|-8) -> Gerade g: y = -2x mit Schnittstellen H, W, T -> Flächeninhalt $A = 2\cdot\int_0^2 (f(x)-y)dx = 2$ FE (Symmetrie der Funktion f(x) zum Wendepunkt); f) Reckteckpunkt P(u|f(u)) mit 0≤u≤6 (4. Quadrant) -> Flächeninhalt $A(u) = -uf(u) = -u^3(u-6)/4 = -u^4/4+3u^3/2$ -> $A'(u) = -u^3+4{,}5u^2 = 0$ => u=0, u=4,5 mit maximalen Flächeninhalt A(4,5) = 34,172 FE, Breite = 4,5 LE, Höhe = 7,6 LE.

Aufgabe 6a)-c): Funktion f(x)	Aufgabe 6e): Funktionen f(x), y, Flächeninhalt A	Aufgabe 6f): Funktion f(x), Rechteck (4. Quadrant)
		

Aufgabe 7 (mit Hilfsmitteln): a) Eine ganz rationale Funktion (Polynomfunktion) 3. Grades f(x) besitzt eine Nullstelle N(2|0) und den Tiefpunkt T(3|-13); weiter liegt der Punkt P(1|31) auf dem Graphen der Funktion. Bestimme die Funktionsgleichung.

Im Folgenden sei die Funktion $f(x) = 2x^3 – 3x^2 – 36x + 68$ gegeben.

b) Bestimme alle Nullstellen der Funktion f(x).

c) Berechne den Hochpunkt der Funktion f(x).

d) Für welche reellen x ist die Funktion f(x) rechts, für welche links gekrümmt?

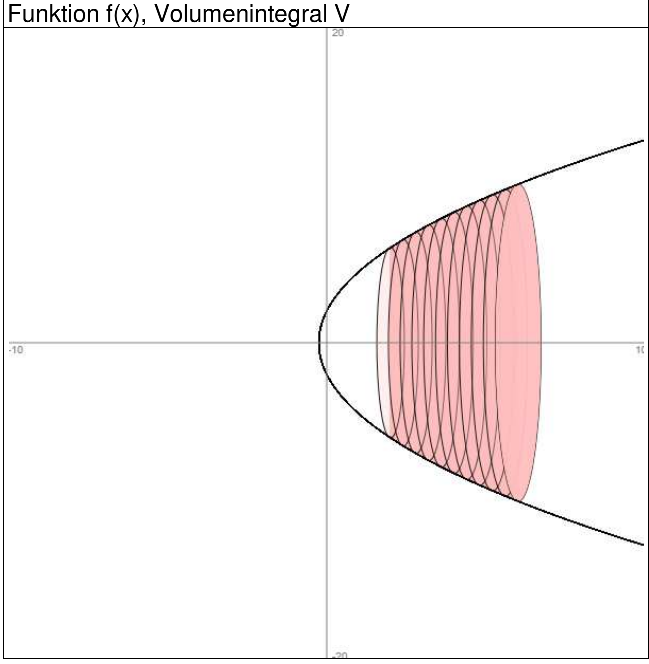
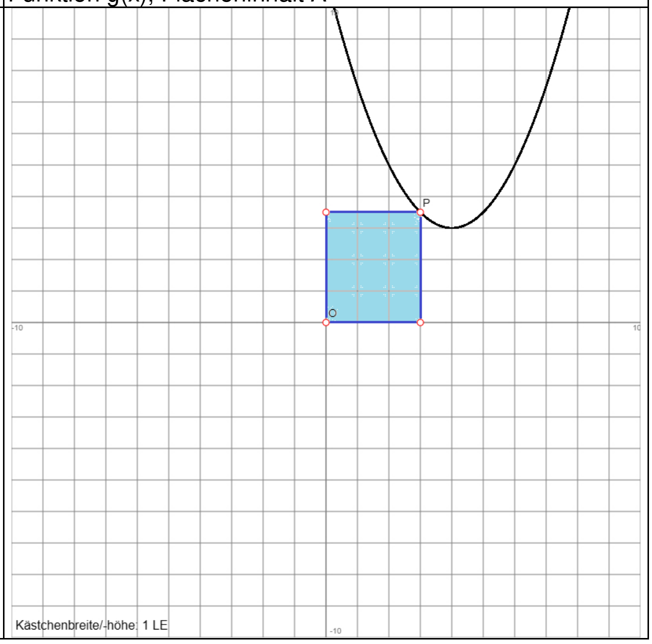
Gegeben sei nun die Wurzelfunktion g(x) = $2\sqrt{4x+1}$.

e) Durch Rotation der Funktion g(x) um die x-Achse auf dem Intervall [2; 6] entsteht ein Rotationskörper. Berechne das Volumenintegral dieses Rotationskörpers.

Gegeben ist die Parabelfunktion h(x) = $\frac{1}{2}(x-4)^2 + 3$.

f) Ein zu den Achsen des x-y-Koordinatensystems paralleles Rechteck besitzt den Koordinatenursprung O(0|0) und einen Punkt P(u|h(u)) als Ecken. Bestimme Länge und Höhe des Rechtecks, das den kleinsten Umfang hat.

Lösungen: 7a) $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$, $f'(x) = 3ax^2+2bx+c$, f(2)=0, f(3)=-13, f'(3)=0, f(1)=31 -> lineares Gleichungssystem: 8a+4b+2c+d = 0, 27a+9b+3c+d = -13, 27a+6b+c = 0, a+b+c+d = 31 -> a = 2, b = -3, c = -36, d = 68 -> Funktion $f(x) = 2x^3-3x^2-36x+68$; b) a) -> N(2|0) -> Polynomdivision: $(2x^3-3x^2-36x+68):(x-2) = 2x^2+x-34 = 0$ -> N(-4,38|0), N(3,88|0); c) $f'(x) = 6x^2-6x-36 = 0$ -> x = -2, x = 3 -> Hochpunkt H(-2|112); d) $f'(x) = 6x^2-6x-36$, $f''(x) = 12x-6 = 0$ -> Wendepunkt W(0,5|49,5) -> Krümmungsintervalle: (-∞; 0,5): Rechtskrümmung, (0,5; +∞): Linkskrümmung; e) Volumen des Rotationskörpers $V = \pi\cdot\int_2^6(g(x))^2dx = \pi\cdot\int_2^6(4(4x+1))dx = 854{,}5132$ VE; f) Umfangsfunktion $U(u) = 2u+2h(u) = u^2-6u+22$ -> $U'(u) = 2u-6 = 0$ -> u = 3 mit minimalen Umfang U(3) = 13 LE bei Länge 3 LE und Höhe 3,5 LE.

Aufgabe 7e): Funktion f(x), Volumenintegral V	Aufgabe 7g): Funktion g(x), Flächeninhalt A
	

(FE = Flächeneinheiten, LE = Längeneinheiten, VE = Volumeneinheiten)