

Mathematik-Abiturprüfung

> Vektorrechnung II

Einleitung: Die (schriftliche, mündliche) Mathematik-Abiturprüfung für (allgemein bildende, berufliche) Gymnasien beinhaltet die Themenbereiche Analysis, analytische Geometrie und Wahrscheinlichkeitsrechnung, jeweils gegliedert in Aufgaben ohne und mit Hilfsmitteln (wissenschaftlicher Taschenrechner, Merkhilfe/Formelsammlung). Im Bereich der Vektorrechnung betreffen die Aufgaben Themen wie lineare Gleichungssysteme, Punkte, Geraden, Ebenen im dreidimensionalen Vektorraum, deren Konstruktion und Lagebeziehungen zueinander.

Nachstehend findet sich eine Aufgabe zum mündlichen Abitur (Hauptaufgabe: Analysis, Nebenaufgabe: Vektorrechnung).

Aufgabe (mit Hilfsmitteln): Gegeben sind die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und die Ebene

$$E: 2x_1 + x_2 - x_3 = 3.$$

- Erläutere, wie die entsprechende Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene (Gerade liegt auf der Ebene; Gerade und Ebene schneiden sich im Schnittpunkt/Durchstoßpunkt; Gerade und Ebene sind parallel zueinander, wobei die Gerade nicht auf der Ebene liegt) ermittelt werden kann.
- Bestimme, wie die Gerade g und die Ebene E zueinander liegen.
- Im Fall, dass sich die Gerade g und die Ebene E in einem Schnittpunkt S schneiden, ist die Weite des Schnittwinkels φ zu berechnen.

Lösungen: a) Geradengleichung g in Parameterform $\rightarrow$ Koordinaten der Geradengleichung $x_1 = a_1 + tu_1$, $x_2 = a_2 + tu_2$, $x_3 = a_3 + tu_3 \rightarrow$ Einsetzen in die Ebenengleichung E in Koordinatenform $\rightarrow a(a_1 + tu_1) + b(a_2 + tu_2) + c(a_3 + tu_3) = d$ (*) $\rightarrow$ lineare Gleichung in t (*) $\rightarrow$ allgemein gültige Lösung von (*), d.h.: Gerade g auf Ebene E; eindeutige Lösung t^* , d.h.: Schnittpunkt S von Gerade g und Ebene E; keine Lösung, d.h.: Parallelität von Gerade g und Ebene E, wobei die Gerade nicht auf der Ebene liegt.

b) Vorgehensweise gemäß a): Gerade g $\rightarrow x_1 = -1 + 3t$, $x_2 = 2 - 4t$, $x_3 = 3 - t \rightarrow$ Einsetzen in Ebenengleichung E $\rightarrow$ lineare Gleichung und deren Lösung: $2(-1 + 3t) + (2 - 4t) - (3 - t) = 3 \Leftrightarrow -2 + 6t + 2 - 4t - 3 + t = 3 \Leftrightarrow 3t - 3 = 3 \Leftrightarrow 3t = 6 \Leftrightarrow t = 2 \rightarrow$ Einsetzen in Geradengleichung g $\rightarrow$ Gerade g und Ebene E schneiden sich im Schnittpunkt S(5|-6|1).

c) Schnittpunkt S(5|-6|1) mit Schnittwinkel φ zwischen Gerade g und Ebene E $\rightarrow \vec{u}$ als Richtungsvektor der Gerade g, $\vec{n}$ als Normalenvektor der Ebene E $\rightarrow \sin(\varphi) = |\vec{u} \cdot \vec{n}| / (|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|) = 0,24022 \rightarrow$ Schnittwinkelweite $\varphi = 13,9^\circ$.

www.michael-buhlmann.de / 06.2026 / Mathematik-Abiturprüfung: Vektorrechnung II / Aufgabe 2612