

# Mathematik-Abiturprüfung

## > Vektorrechnung III

---

**Einleitung:** Die (schriftliche, mündliche) Mathematik-Abiturprüfung für (allgemein bildende, berufliche) Gymnasien beinhaltet die Themenbereiche Analysis, analytische Geometrie und Wahrscheinlichkeitsrechnung, jeweils gegliedert in Aufgaben ohne und mit Hilfsmitteln (wissenschaftlicher Taschenrechner, Merkhilfe/Formelsammlung). Im Bereich der Vektorrechnung betreffen die Aufgaben Themen wie lineare Gleichungssysteme, Punkte, Geraden, Ebenen im dreidimensionalen Vektorraum, deren Konstruktion und Lagebeziehungen zueinander.

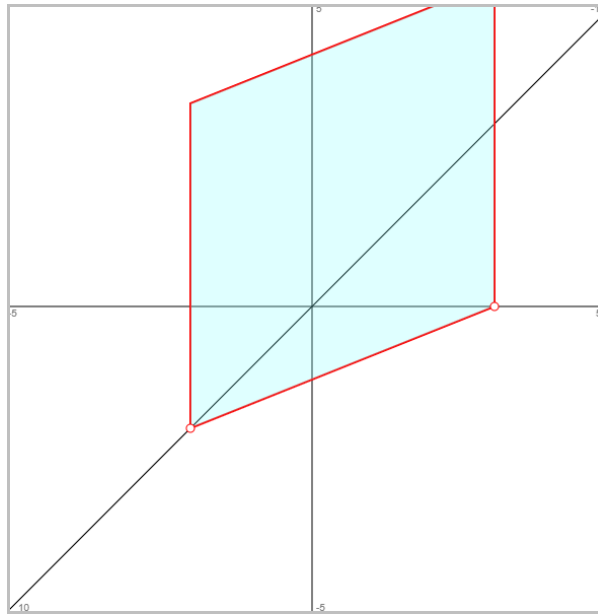
Nachstehend findet sich eine Aufgabe zum mündlichen Abitur (Hauptaufgabe: Vektorrechnung, Nebenaufgabe: Analysis).

**Aufgabe** (mit Hilfsmitteln): Gegeben sind der Punkt  $P(6|11|-5)$ , die Gerade  $\ell: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

und die Ebene  $E: 3x_1 + 4x_2 = 12$ .

- Zeichne die Ebene  $E$  in ein passendes  $x_1$ - $x_2$ - $x_3$ -Koordinatensystem ein. Welche besondere Lage hat die Ebene?
- Zeige, dass die Gerade  $\ell$  eine Lotgerade zur Ebene  $E$  durch den Punkt  $P$  ist. Berechne den Abstand zwischen der Ebene  $E$  und dem Punkt  $P$ .
- Gib die Gleichung einer Ebene  $F$  an, die parallel zur Ebene  $E$  liegt und den Punkt  $P$  enthält. Wie groß ist der Abstand zwischen den Ebenen  $E$  und  $F$ ?
- Gib die Gleichung einer Ebene  $G$  an, die orthogonal zur Ebene  $E$  steht und den Punkt  $P$  enthält. Charakterisiere die Lage aller solcher orthogonalen Ebenen im dreidimensionalen Raum.

**Lösungen:** a) Ebene E parallel zur  $x_3$ -Achse gemäß der Ebenenspurpunkte:  $S_1(4|0|0)$ ,  $S_2(3|0|0)$  und:



b) I. Lotgerade:  $P(6|11|-5) \in \ell$  (Stützvektor), Richtungsvektor  $\vec{u} = \text{Normalenvektor } \vec{n} \Rightarrow \text{Gerade } \ell \perp \text{Ebene E.}$

II. Lotfußpunkt: Gerade  $\ell \rightarrow x_1 = 6+3t, x_2 = 11+4t, x_3 = -5t \rightarrow$  Einsetzen in Ebenengleichung E  $\rightarrow$  lineare Gleichung und deren Lösung:  $3(6+3t) + 4(11+4t) = 12 \Leftrightarrow 18 + 9t + 44 + 16t = 12 \Leftrightarrow 25t + 62 = 12 \Leftrightarrow 25t = -50 \Leftrightarrow t = -2 \rightarrow$  Einsetzen in Geradengleichung  $\ell \rightarrow$  Lotfußpunkt  $F(0|3|-5)$ .

III. Abstand Punkt-Ebene:  $d(P, E) = d(P, F) = |\vec{PF}| = |(-6 \ -8 \ 0)^T| = (6^2 + 8^2 + 0^2)^{1/2} = 10 \text{ LE.}$

c) I. Zu E parallele Ebene F mit demselben Normalenvektor:  $F: 3x_1 + 4x_2 = d$  mit  $d = 3 \cdot 6 + 4 \cdot 11 = 62$  (Einsetzen des Punktes P)  $\rightarrow$  Ebene F:  $3x_1 + 4x_2 = 62$ .

II. Abstand Ebene-Ebene:  $d(E, F) = d(P, E) = 10 \text{ LE.}$

d) I. Ebenengleichung in Parameterform mit dem Stützvektor  $\vec{OP} = (6 \ 11 \ -5)^T$  sowie den Spannvektoren  $\vec{n} = (3 \ 4 \ 0)^T$  und z.B.  $\vec{v} = (-4 \ 3 \ 0)^T$  ( $\vec{v} \perp \vec{n}, \vec{v} \parallel E$ )  $\rightarrow G: \vec{x} = (6 \ 11 \ -5)^T + r \cdot (3 \ 4 \ 0)^T + s \cdot (-4 \ 3 \ 0)^T$ . Oder Ebenengleichung in Koordinatenform:  $E \parallel x_3\text{-Achse} \rightarrow G \perp x_3\text{-Achse} \rightarrow G: x_3 = -5$  ( $P \in G$ ). Oder Ansatz:  $\vec{n} \cdot \vec{n}_G = 0 \rightarrow 3n_{g1} + 4n_{g2} = 0, n_{g3}$  beliebig für den Normalenvektor von G mit  $G: n_{g1}x_1 - 0,75n_{g1}x_2 + n_{g3}x_3 = -2,25 - 5n_{g3}$  ( $P \in G$ ).

II. Unendliche viele Ebenen G mit:  $G \perp E, P \in G \rightarrow$  Ebenenbüschel um Lotgerade  $\ell$  senkrecht zur Ebene E.

(LE = Längeneinheiten,  $^T$  = transponiert)

[www.michael-buhlmann.de](http://www.michael-buhlmann.de) / 06.2026 / Mathematik-Abiturprüfung: Vektorrechnung II / Aufgabe 2616