Michael Buhlmann

Mathematatik-Abiturprüfung
> Aufgaben zur Vektorrechnung I

Einleitung: Die (mündliche) Mathematik-Abiturprüfung für (allgemein bildende, berufliche) Gymnasien beinhaltet die Themenbereiche Analysis, analytische Geometrie bzw. Matrizenrechnung und Wahrscheinlichkeitsrechnung, jeweils gegliedert in Aufgaben ohne und mit Hilfsmitteln (wissenschaftlicher Taschenrechner, Merkhilfe/Formelsammlung). Im Bereich der Vektorrechnung (analytische Geometrie) betreffen die Aufgaben Punkte, Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Vektorraum, deren Konstruktion und Lage zueinander, Figuren (Dreiecke, Parallelogramme, Trapeze) und Körper (Quader, Pyramiden).

Aufgabe 1 (mit Hilfsmitteln): Gegeben sind die Ebene

$$E: 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 12$$

und der Punkt S(3|4|7).

a) Die Spurpunkte A (x_1-Achse), B (x_2-Achse), C (x_3-Achse) der Ebene E bilden zusammen mit Punkt S eine Dreieckpyramide ABCS mit Grundfläche ABC und Spitze S. Zeichne die Pyramide in ein kartesisches x_1-x_2-x_3-Koordinatensystem ein.

b) Zeige, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist und berechne dessen Flächeninhalt. Zeige weiter, dass der Vektor $\overrightarrow{CS}$ senkrecht auf der Grundfläche steht. Berechne das Volumen der Pyramide.

c) Bestimme die Ebene F durch die Ecken A, C, S der Pyramidenfläche. Gib die Schnittgerade g zwischen den Ebenen E und F an.

d) Berechne den Abstand der Ebene F zur Pyramidenecke B.

Aufgabe 2 (mit Hilfsmitteln): Gegeben sind die Ebene

$$E: 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 10$$

und die Geraden:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ h: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Weise nach, dass die Ebene E und die Gerade g zueinander parallel sind und die Gerade nicht auf der Ebene liegt.

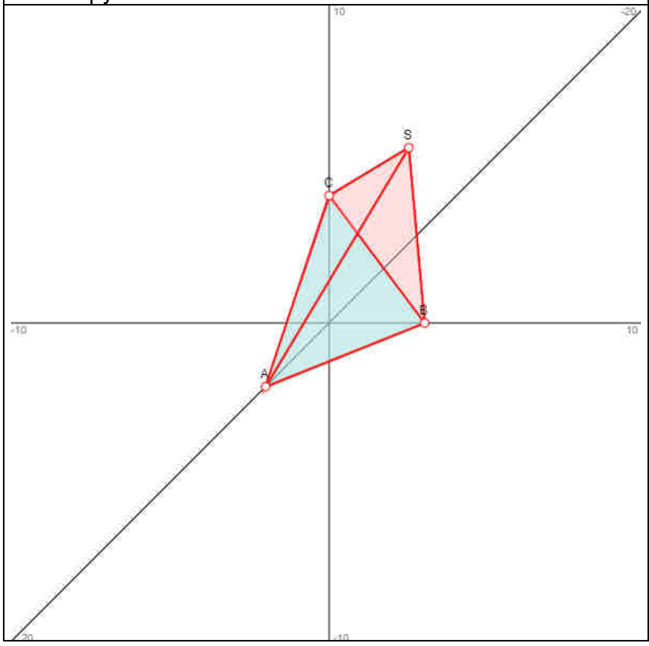
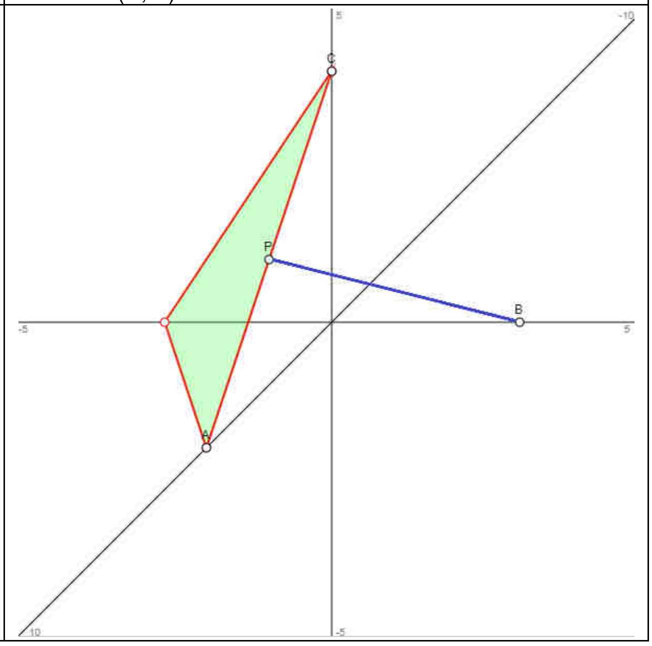
b) Gib die Gleichung einer Ebene F an, die parallel zur Ebene E liegt und die Gerade g beinhaltet. Wie groß ist der Abstand zwischen beiden Ebenen? Was lässt sich zum Abstand zwischen der Ebene E und der Gerade g sagen?

c) Zeige, dass sich die Geraden g und h im Schnittpunkt S(5|-4|10) schneiden.

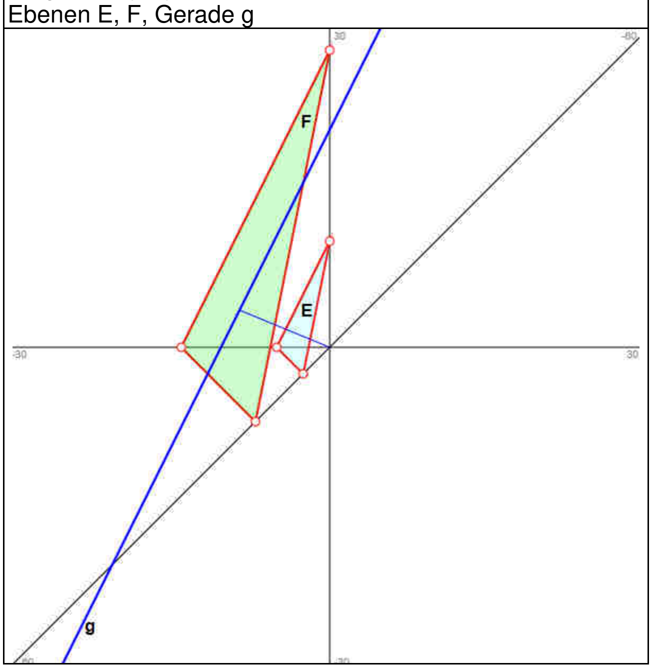
d) Die Geraden g und h spannen eine Ebene K auf. Gib eine Koordinatengleichung der Ebene K an.

e) Berechne den Schnittwinkel zwischen den sich schneidenden Ebenen E und K.

Lösungen: 1b) Spurpunkte A(4|0|0), B(0|3|0), C(0|0|4) -> $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = 5$, $|\overrightarrow{AC}| = 4\sqrt{2}$ => $G = 4\sqrt{2}\cdot\sqrt{17}/2 = 2\sqrt{34} \approx$ 11,66 FE, $\overrightarrow{CS} = (3\ 4\ 3)^T$ = Normalenvektor der Ebene -> Orthogonalität -> $h = |\overrightarrow{CS}| = \sqrt{34} = 5{,}83$ LE, Volumen $V = Gh/3 = 22\ 2/3$ VE; c) Punkte A, C, S -> Ebene F: $2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 8$ -> Schnittgerade $E \cap F = g$ als Spurgerade durch A und C -> g: $\vec{x} = (4\ 0\ 0)^T + t\cdot(-4\ 0\ 4)^T$; d) Lotgerade $h \perp F$ durch B, $h \cap F = \{P\}$ mit P(2|0|2) und Abstand $d(B,F) = d(B,P) = |\overrightarrow{BP}| = \sqrt{17} = 4{,}12$ LE.

Aufgabe 1a): Dreieckpyramide ABCS	Aufgabe 1d): Abstand d(B, F)
	

2a) $g \cap E$ -> $2\cdot5-2(-6+2t)+(6+4t) = 10 \Leftrightarrow 28 = 10$ -> keine Lösung -> g || E, $g \not\subset E$; b) $P(5|-6|6) \in g$ -> E || F: $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 28$, Abstand $d(E,F) = d(E,g) = d(P,E) = 6$ LE; c) $g \cap h = \{S\}$ mit S(5|-4|10) (r=1, s=-2); d) Geraden g, h -> Ebene E: $\vec{x} = (5\ 4\ -10)^T + r\cdot(0\ 2\ 4)^T + s\cdot(1\ 2\ 0)^T$ (PF) -> E: $4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$ (KF); e) Ebenen E, K -> Schnittwinkel $\varphi = 19°$.

Aufgabe 2a), b): Ebenen E, F, Gerade g


(FE = Flächeneinheiten, KF = Koordinatenform, LE = Längeneinheiten, PF = Parameterform, VE = Volumeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 06.2022 / Mathematik-Abiturprüfung: Analysis-Aufgaben I / Aufgaben 1642-1643