

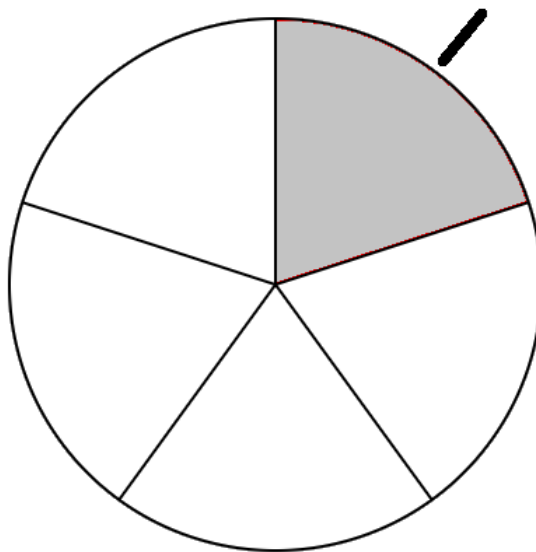
Mathematik-Abiturprüfung

> Wahrscheinlichkeitsrechnung I

Einleitung: Die (schriftliche, mündliche) Mathematik-Abiturprüfung für (allgemein bildende, berufliche) Gymnasien beinhaltet die Themenbereiche Analysis, analytische Geometrie und Wahrscheinlichkeitsrechnung, jeweils gegliedert in Aufgaben ohne und mit Hilfsmitteln (wissenschaftlicher Taschenrechner, Merkhilfe/Formelsammlung). Im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffen die Aufgaben Themen wie Baumdiagramme und Erwartungswert, Bernoulli-Experiment und Binomialverteilung, Normalverteilung.

Nachstehend findet sich eine Aufgabe zum mündlichen Abitur (Hauptaufgabe: Analysis, Nebenaufgabe: Wahrscheinlichkeitsrechnung).

Aufgabe (mit Hilfsmitteln): Auf dem nachstehenden Glücksrad



sind ein graues Segment und weiße Segmente ausgewiesen. Das Glücksrad wird zwanzig Mal gedreht, das Auftreten des grauen Segments auf der rechtsoberen Position im Glücksrad wird gezählt.

a) Erläutere, dass es sich bei dem beschriebenen Zufallsexperiment um ein Bernoulli-Experiment handelt. Erkläre die Bernoulli-Formel.

b) Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten, wenn die Zufallsgröße X die Anzahl des Auftretens des grauen Segments zählt:

A: Genau drei Mal wird das Glücksrad auf „grau“ gedreht.

B: $p(X \neq 5)$.

C: Mehr als zehn Mal wird ein weißes Segment gedreht.

D: $p(3 \leq X < 8)$.

c) Berechne Erwartungswert und Standardabweichung der dem Zufallsexperiment zugrunde liegenden Binomialverteilung.

Lösungen: a) Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment mit zwei Ausgängen (T = Treffer, N = Nichttreffer), der Grundwahrscheinlichkeit p als Trefferwahrscheinlichkeit, der Anzahl n der Experimentwiederholung „mit Zurücklegen“. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer bei n-maliger Wiederholung des Experiments an. Sie ist B(n; p)-binomialverteilt mit den Parametern n (Anzahl der Versuchswiederholungen) und p (Trefferwahrscheinlichkeit) und genügt der Bernoulliformel:

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n$$

mit $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ als Binomialkoeffizienten. Als Rechenregeln im Zusammenhang

mit der Bernoulliformel ergeben sich:

$$\begin{aligned} p(X=0) &= (1-p)^n \\ p(X=n) &= p^n \\ p(X \leq k) &= p(X=0) + p(X=1) + \dots + p(X=k) = 1 - p(X > k) \\ p(X < k) &= p(X \leq k-1) = 1 - p(X \geq k) \\ p(X \geq k) &= 1 - p(X \leq k-1) \\ p(X > k) &= p(X \geq k+1) = 1 - p(X \leq k) \\ p(k_1 \leq X \leq k_2) &= p(X=k_1) + \dots + p(X=k_2) = p(X \leq k_2) - p(X \leq k_1-1) \\ p(k_1 < X \leq k_2) &= p(X=k_1+1) + \dots + p(X=k_2) = p(X \leq k_2) - p(X \leq k_1) \\ p(k_1 \leq X < k_2) &= p(X=k_1) + \dots + p(X=k_2-1) = p(X \leq k_2-1) - p(X \leq k_1-1) \\ p(k_1 < X < k_2) &= p(X=k_1+1) + \dots + p(X=k_2-1) = p(X \leq k_2-1) - p(X \leq k_1). \end{aligned}$$

b) Wahrscheinlichkeiten: $p(A) = p(X=3) = 0,2054$,

$p(B) = p(X \neq 5) = 1 - p(X=5) = 0,8254$,

mehr als 10 Mal weiß = höchstens 9 Mal grau $\rightarrow p(C) = p(X \leq 9) = 0,9974$,

$p(D) = p(3 \leq X < 8) = p(X \leq 7) - p(X \leq 2) = 0,7618$.

c) Erwartungswert: $\mu = np = 20 \cdot 0,2 = 4$; Standardabweichung: $\sigma = (np(1-p))^{1/2} = \sqrt{3,2} = 1,7889$.

www.michael-buhlmann.de / 06.2026 / Mathematik-Abiturprüfung: Wahrscheinlichkeitsrechnung I / Aufgabe 2614