Eine ganz rationale Funktion (Polynom) f: **R** -> **R** ist vom Typ:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

(für natürliche Zahlen n und reelle Koeffizienten a_0, …, a_n). n heißt der Grad der ganz rationalen Funktion.

Die Kurvendiskussion ermittelt die Besonderheiten der aus einer Funktion f(x) sich ergebenden Kurve im x-y-Koordinatensystem, des Graphen von f(x). Hinsichtlich einer ganz rationalen Funktion f(x) heißt das:

Zentrale Punkte der Kurvendiskussion

Funktion: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

I. Ableitungen (nach Potenz- und Summenregel sowie Regel vom konstanten Faktor):

$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + ... + a_1$

$f''(x) = n(n-1) a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_{n-1} x^{n-3} + ... + 2a_2$

$f'''(x) = n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3) a_{n-1} x^{n-4} + ... + 6a_3$

II. Nullstellen (Anzahl maximal n; Gleichung f(x) = 0 lösen):
f(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> N(x_1|0), N(x_2|0), … (Nullstellen mit gerader Vielfachheit als Hoch-/Tiefpunkte ohne Vorzeichenwechsel; Nullstellen mit ungerader Vielfachheit mit Vorzeichenwechsel)

III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Anzahl maximal n-1; Gleichung f‘(x) = 0 lösen, Lösungen in f‘‘(x) einsetzen):
a) f‘(x) = 0 -> x_1, x_2, …
b) f‘‘(x_1) < 0 -> H(x_1|f(x_1)) oder f‘‘(x_1) > 0 -> T(x_1|f(x_1)); f‘‘(x_2) < 0 -> H(x_2|f(x_2)) oder f‘‘(x_2) > 0 -> T(x_2|f(x_2)); …

IV. Wendepunkte (Anzahl maximal n-2; Gleichung f‘‘(x) = 0 lösen, Lösungen in f‘‘‘(x) einsetzen):
a) f‘‘(x) = 0 -> x_1, x_2, …
b) f‘‘‘(x_1) ≠ 0 -> W(x_1|f(x_1)); f‘‘‘(x_2) ≠ 0 -> W(x_2|f(x_2)); …

IVa. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach III. und IV.) gilt:
f‘(x_0) = 0, f‘‘(x_0) = 0, f‘‘‘(x_0) ≠ 0 -> S(x_0|f(x_0))

Kurvendiskussion ganz rationaler Funktionen

Zusätzliche Punkte der Kurvendiskussion

V. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach III.]; bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall):

– Monotonieintervall (-∞, x_1): f(x) monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, f‘(x_0)>0) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, f‘(x_0)<0);
– Monotonieintervall (x_1, x_2): f(x) monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, f‘(x_0)<0) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie f‘(x_0)>0); …
– Monotonieintervall (x_n, ∞): f(x) monoton fallend (x_n als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie f‘(x_0)<0) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, f‘(x_0)>0)

VI. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach [IV.]; bei Wendepunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall):

– Krümmungsintervall (-∞, x_1): f(x) links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, f‘‘(x_0)>0) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, f‘‘(x_0)<0);
– Krümmungsintervall (x_1, x_2): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, f‘‘(x_0)<0) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, f‘‘(x_0)>0); …
– Krümmungsintervall (x_n, ∞): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, f‘‘(x_0)<0) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, f‘‘(x_0)>0)

VII. Symmetrie:
a) Achsensymmetrie (zur y-Achse): f(-x) = f(x) oder: nur gerade Exponenten im Term von f(x) (gerade)
b) Punktsymmetrie (zum Ursprung): f(-x) = -f(x) oder: nur ungerade Exponenten im Term von f(x) (ungerade)
c) f(x) achsensymmetrisch -> f‘(x) punktsymmetrisch -> f‘‘(x) achsensymmetrisch usw.
f(x) punktsymmetrisch -> f‘(x) achsensymmetrisch -> f‘‘(x) punktsymmetrisch usw.

VIII. Verhalten für betragsmäßig große x (x->∞, x->-∞) (n als Grad der ganz rationalen Funktion):

a_n>0	n ungerade	n gerade	a_n<0	n ungerade	n gerade
x->∞	f(x) -> ∞	f(x) -> ∞	x->∞	f(x) -> -∞	f(x) -> -∞
x->-∞	f(x) -> -∞	f(x) -> ∞	x->-∞	f(x) -> ∞	f(x) -> -∞

Kurvendiskussion ganz rationaler Funktionen