Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Ableitung/Differenzierbarkeit

Aufgabe: Untersuche die Funktion f(x) auf Differenzierbarkeit im Punkt x_0:

$$f(x) = (x-1)^2 - 2x \text{ , } x_0 = 1.$$

1. Lösung (mit der h-Methode): I. Allgemein gilt: Für eine Funktion f: D_f -> **R** und ein $x_0 \varepsilon D_f$ heißt f'(x_0) im Falle der Differenzierbarkeit von f in x_0 die Ableitung der Funktion f im Punkt x_0. Die Ableitung f'(x_0) ist die Steigung von f in x_o, die Ableitungen in allen Punkten $x \varepsilon D_{f'}$ bilden die Ableitungsfunktion f': $D_{f'}$ -> **R** mit der Funktionsvorschrift f'(x). Die Ableitung f'(x_0) zu einer Funktion f in einem Punkt x_0 bestimmt sich als Grenzwert des Differenzenquotienten $f'(x_0) = \lim\limits_{h->0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$. Existenz der Ableitung in x_0 bedeutet also Existenz des Grenzwertes, des Differenzialquotienten.

II. Wir betrachten, indem wir in f(x) für x einmal x_0 = 1, zum anderen x_0+h = 1+h einsetzen, schließlich h im Differenzenquotienten wegkürzen und den Grenzprozess durchführen:

$$\lim_{h->0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h->0} \frac{[(1+h-1)^2 - 2(1+h)] - [(1-1)^2 - 2 \cdot 1]}{h} =$$

$$\lim_{h->0} \frac{[h^2 - 2 - 2h] - [0^2 - 2]}{h} = \lim_{h->0} \frac{h^2 - 2 - 2h + 2}{h} = \lim_{h->0} \frac{h^2 - 2h}{h} =$$

$$\lim_{h->0} (h-2) = 0 - 2 = -2$$

Wir erhalten damit: f'(1) = -2.

2. Lösung (mit der x-Methode): I. Allgemein gilt: Für eine Funktion f: D_f -> **R** und ein $x_0 \varepsilon D_f$ heißt f'(x_0) im Falle der Differenzierbarkeit von f in x_0 die Ableitung der Funktion f im Punkt x_0. Die Ableitung f'(x_0) ist die Steigung von f in x_o, die Ableitungen in allen Punkten $x \varepsilon D_{f'}$ bilden die Ableitungsfunktion f': $D_{f'}$ -> **R** mit der Funktionsvorschrift f'(x). Die Ableitung f'(x_0) zu einer Funktion f in einem Punkt x_0 bestimmt sich als Grenzwert des Differenzenquotienten $f'(x_0) = \lim\limits_{x->x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Existenz der Ableitung in x_0 bedeutet also Existenz des Grenzwertes, des Differenzialquotienten.

II. Wir betrachten, indem wir in f(x) für x_0 = 1 einsetzen, schließlich x–x_0 im Differenzenquotienten wegkürzen und den Grenzprozess durchführen:

$$\lim_{x->x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x->1} \frac{[(x-1)^2 - 2x] - [(1-1)^2 - 2 \cdot 1]}{x-1} =$$

$$\lim_{x->1} \frac{[x^2 - 2x + 1 - 2x] - [0^2 - 2]}{x-1} = \lim_{x->1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x-2} = (*)$$

Nun gilt z.B. mit Polynomdivision: $\frac{x^2 - 4x + 3}{x-1} = (x^2 - 4x + 3) : (x-1) = x - 3$; wir rechnen weiter:

$$(*) = \lim_{x->1} (x-3) = 1 - 3 = -2$$

Wir erhalten damit: f'(1) = -2.

www.michael-buhlmann.de / 07.2014 / Aufgabe 6