

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Ableitung/Differenzierbarkeit

Aufgabe: Untersuche die Funktion $f(x)$ auf Differenzierbarkeit im Punkt x_0 :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 5}, \quad x_0 = 2.$$

1. Lösung (mit der h -Methode): I. Allgemein gilt: Für eine Funktion $f: D_f \rightarrow \mathbf{R}$ und ein $x_0 \in D_f$ heißt $f'(x_0)$ im Falle der Differenzierbarkeit von f in x_0 die Ableitung der Funktion f im Punkt x_0 . Die Ableitung $f'(x_0)$ ist die Steigung von f in x_0 , die Ableitungen in allen Punkten $x \in D_f$ bilden die Ableitungsfunktion $f': D_f \rightarrow \mathbf{R}$ mit der Funktionsvorschrift $f'(x)$. Die Ableitung $f'(x_0)$ zu einer Funktion f in einem

Punkt x_0 bestimmt sich als Grenzwert des Differenzenquotienten $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Existenz der Ableitung in x_0 bedeutet also Existenz des Grenzwertes, des Differenzialquotienten.

II. Es gilt mit $x_0 = 2$ und $x_0 + h = 2 + h$ und auf Grund der dritten binomischen Formel $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ beim Erweitern des Differenzenquotienten:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(2+h)^2 + 5} - \sqrt{2^2 + 5}}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + 4h + h^2 + 5} - \sqrt{9}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 + 4h + h^2} - 3}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{9 + 4h + h^2} - 3)(\sqrt{9 + 4h + h^2} + 3)}{h(\sqrt{9 + 4h + h^2} + 3)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 4h + h^2 - 9}{h(\sqrt{9 + 4h + h^2} + 3)} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h + h^2}{h(\sqrt{9 + 4h + h^2} + 3)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + h}{\sqrt{9 + 4h + h^2} + 3} = \frac{4 + 0}{\sqrt{9 + 0 + 0} + 3} =$$

$$\frac{4}{3 + 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Wir haben damit als Ableitung: $f'(2) = \frac{2}{3}$.

2. Lösung (mit der x -Methode): I. Allgemein gilt: Für eine Funktion $f: D_f \rightarrow \mathbf{R}$ und ein $x_0 \in D_f$ heißt $f'(x_0)$ im Falle der Differenzierbarkeit von f in x_0 die Ableitung der Funktion f im Punkt x_0 . Die Ableitung $f'(x_0)$ ist die Steigung von f in x_0 , die Ableitungen in allen Punkten $x \in D_f$ bilden die Ableitungsfunktion $f': D_f \rightarrow \mathbf{R}$ mit der Funktionsvorschrift $f'(x)$. Die Ableitung $f'(x_0)$ zu einer Funktion f in einem

Punkt x_0 bestimmt sich als Grenzwert des Differenzenquotienten $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Existenz der Ableitung in x_0 bedeutet also Existenz des Grenzwertes, des Differenzialquotienten.

II. Es gilt mit $x_0 = 2$ und auf Grund der dritten binomischen Formel $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ beim Erweitern des Differenzenquotienten:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{2^2 + 5}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2 + 5} - 3)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)}{(\sqrt{x^2 + 5} + 3)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 5) - 9}{(\sqrt{x^2 + 5} + 3)(x - 2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{(\sqrt{x^2 + 5} + 3)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{(\sqrt{x^2 + 5} + 3)(x - 2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} = \frac{2 + 2}{\sqrt{2^2 + 5} + 3} = \frac{4}{3 + 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Wir haben damit als Ableitung: $f'(2) = \frac{2}{3}$.

www.michael-buhlmann.de / 07.2014 / Aufgabe 8