Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Ableitung/Nicht-Differenzierbarkeit

Aufgabe: Zeige, dass die Funktion f(x) an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist mit:

$$f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\ .$$

Lösung: I. Allgemein gilt: Für eine Funktion f: D_f -> **R** und ein $x_0 \varepsilon D_f$ heißt $f'(x_0)$ im Falle der Differenzierbarkeit von f in x_0 die Ableitung der Funktion f im Punkt x_0. Die Ableitung $f'(x_0)$ ist die Steigung von f in x_0, die Ableitungen in allen Punkten $x \varepsilon D_{f'}$ bilden die Ableitungsfunktion f': $D_{f'}$ -> **R** mit der Funktionsvorschrift f'(x). Die Ableitung $f'(x_0)$ zu einer Funktion f in einem Punkt x_0 bestimmt sich als Grenzwert des (links-, rechtsseitigen) Differenzenquotienten

$$f'(x_0) = \lim_{x->x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{x->x_0 \\ x<x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{x->x_0 \\ x>x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Existenz der Ableitung in x_0 bedeutet also Existenz des Grenzwertes, des Differenzialquotienten. Dessen Nichtexistenz führt folglich auf die Nicht-Differenzierbarkeit der Funktion f(x) an der Stelle x_0.

II. $x_0 = 0$ ist eine Randstelle des Definitionsbereichs $D_f = [0, \infty)$. Wir formen die vorgegebene Wurzelfunktion zunächst um:

$$f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = \left(\left(x^{\frac{1}{2}} \cdot x\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x\right)^{\frac{1}{2}} = \left(x^{\frac{3}{4}} \cdot x\right)^{\frac{1}{2}} = \left(x^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{7}{8}}.$$

Wir betrachten nun den nur möglichen rechtsseitigen Grenzwert des Differenzenquotienten für x>0 bei $x_0 = 0$:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^{\frac{7}{8}} - 0^{\frac{7}{8}}}{x-0} = \frac{x^{\frac{7}{8}}}{x} = x^{-\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt[8]{x}}$$ -> ∞ bei x -> 0, x>0.

Der rechtsseitige Grenzwert existiert nicht, die Funktion ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

www.michael-buhlmann.de / 11.2020 / Aufgabe 1183