

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Ableitung/Differenzierbarkeit

Aufgabe: Bestimme zur Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$$

die Ableitung $f'(-2)$.

Lösung (mit der x-Methode): I. Allgemein gilt: Für eine Funktion $f: D_f \rightarrow \mathbf{R}$ und ein $x_0 \in D_f$ heißt $f'(x_0)$ im Falle der Differenzierbarkeit von f in x_0 die Ableitung der Funktion f im Punkt x_0 . Die Ableitung $f'(x_0)$ ist die Steigung von f in x_0 , die Ableitungen in allen Punkten $x \in D_f$ bilden die Ableitungsfunktion $f': D_f \rightarrow \mathbf{R}$ mit der Funktionsvorschrift $f'(x)$. Die Ableitung $f'(x_0)$ zu einer Funktion f in einem

Punkt x_0 bestimmt sich als Grenzwert des Differenzenquotienten $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Existenz der Ableitung in x_0 bedeutet also Existenz des Grenzwertes, des Differenzialquotienten.

II. Wir betrachten, indem wir in $f(x)$ für $x = x_0 = -2$ einsetzen, schließlich $x - x_0$ im Differenzenquotienten (unter Verwendung der 3. binomischen Formel) wegekürzen und den Grenzprozess durchführen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\left(\frac{1}{2}x^2 + 3\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot (-2)^2 + 3\right)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\frac{1}{2}x^2 + 3 - 5}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\frac{1}{2}x^2 - 2}{x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\frac{1}{2}(x^2 - 4)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\frac{1}{2}(x - 2)(x + 2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \left[\frac{1}{2}(x - 2) \right] = \frac{1}{2}(-2 - 2) = \frac{1}{2}(-4) = -2. \end{aligned}$$

Wir erhalten damit: $f'(-2) = -2$.