

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Ableitung/Differenzierbarkeit

Aufgabe: Bestimme zur Funktion:

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^2$$

die Ableitung $f'(2)$.

Lösung (mit der x-Methode): I. Allgemein gilt: Für eine Funktion $f: D_f \rightarrow \mathbf{R}$ und ein $x_0 \in D_f$ heißt $f'(x_0)$ im Falle der Differenzierbarkeit von f in x_0 die Ableitung der Funktion f im Punkt x_0 . Die Ableitung $f'(x_0)$ ist die Steigung von f in x_0 , die Ableitungen in allen Punkten $x \in D_f$ bilden die Ableitungsfunktion $f': D_f \rightarrow \mathbf{R}$ mit der Funktionsvorschrift $f'(x)$. Die Ableitung $f'(x_0)$ zu einer Funktion f in einem

Punkt x_0 bestimmt sich als Grenzwert des Differenzenquotienten $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Existenz der Ableitung in x_0 bedeutet also Existenz des Grenzwertes, des Differenzialquotienten.

II. Wir betrachten, indem wir in $f(x)$ für $x = x_0 = 2$ einsetzen, zunächst den Differenzenquotienten, bei dem wir $x - x_0$ (unter Verwendung der 3. binomischen Formel) wegekürzen:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{-\frac{3}{4}x^2 - \left(-\frac{3}{4} \cdot 2^2\right)}{x - 2} = \frac{-\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4} \cdot 4}{x - 2} = \frac{-\frac{3}{4}(x^2 - 4)}{x - 2} = \frac{-\frac{3}{4}(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = -\frac{3}{4}(x + 2).$$

Nun führen wir den Grenzprozess durch:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[-\frac{3}{4}(x + 2) \right] = -\frac{3}{4}(2 + 2) = -\frac{3}{4} \cdot 4 = -3.$$

Wir erhalten damit: $f'(2) = -3$.