

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Ableitung/Differenzierbarkeit

Aufgabe: Bestimme zur Funktion:

$$f(x) = -3x^2 + 5x$$

die Ableitung $f'(4)$.

Lösung (mit der x-Methode): I. Allgemein gilt: Für eine Funktion $f: D_f \rightarrow \mathbf{R}$ und ein $x_0 \in D_f$ heißt $f'(x_0)$ im Falle der Differenzierbarkeit von f in x_0 die Ableitung der Funktion f im Punkt x_0 . Die Ableitung $f'(x_0)$ ist die Steigung von f in x_0 , die Ableitungen in allen Punkten $x \in D_f$ bilden die Ableitungsfunktion $f': D_f \rightarrow \mathbf{R}$ mit der Funktionsvorschrift $f'(x)$. Die Ableitung $f'(x_0)$ zu einer Funktion f in einem Punkt x_0 bestimmt sich als Grenzwert des Differenzenquotienten $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Existenz der Ableitung in x_0 bedeutet also Existenz des Grenzwertes, des Differenzialquotienten.

II. Wir betrachten, indem wir in $f(x)$ für $x = x_0 = 4$ einsetzen, schließlich (bei summandenweisen Aufgliedern der Terme) $x - x_0$ im Differenzenquotienten (auch unter Verwendung der 3. binomischen Formel) wegekürzen und den Grenzprozess durchführen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(-3x^2 + 5x) - (-3 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-3x^2 + 5x - (-48 + 20)}{x - 4} = \\ \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-3x^2 + 48 + 5x - 20}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-3(x^2 - 16) + 5(x - 4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-3(x^2 - 16)}{x - 4} + \lim_{x \rightarrow 4} \frac{5(x - 4)}{x - 4} = \\ \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-3(x - 4)(x + 4)}{x - 4} + \lim_{x \rightarrow 4} \frac{5(x - 4)}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4} [-3(x + 4)] + \lim_{x \rightarrow 4} 5 = -3(4 + 4) + 5 = -24 + 5 = -19. \end{aligned}$$

Wir erhalten damit: $f'(4) = -19$.