

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Ableitungsfunktion

Aufgabe: Bestimme zur (für jedes reelle $x \neq 0$ definierten) Funktion:

$$f(x) = -\frac{4}{x^2}$$

die Ableitungsfunktion $f'(x)$.

Lösung (mit der x-Methode): I. Allgemein gilt: Für eine Funktion $f: D_f \rightarrow \mathbf{R}$ und ein $x_0 \in D_f$ heißt $f'(x_0)$ im Falle der Differenzierbarkeit von f in x_0 die Ableitung der Funktion f im Punkt x_0 . Die Ableitung $f'(x_0)$ ist die Steigung von f in x_0 , die Ableitungen in allen Punkten $x \in D_f$ bilden die Ableitungsfunktion $f': D_f \rightarrow \mathbf{R}$ mit der Funktionsvorschrift $f'(x)$. Die Ableitung $f'(x_0)$ zu einer Funktion f in einem

Punkt x_0 bestimmt sich als Grenzwert des Differenzenquotienten $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Existenz der Ableitung in x_0 bedeutet also Existenz des Grenzwertes, des Differenzialquotienten.

II. Wir betrachten, indem wir in $f(x)$ für x die Stelle $x_0 \in D_f$ einsetzen, schließlich $x - x_0$ im Differenzenquotienten (auch unter Verwendung der 3. binomischen Formel) wegekürzen und den Grenzwert durchzuführen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-\frac{4}{x^2} - \left(-\frac{4}{x_0^2}\right)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-\frac{4}{x^2} + \frac{4}{x_0^2}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-\frac{4x_0^2}{x^2 x_0^2} + \frac{4x^2}{x^2 x_0^2}}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{-4x_0^2 + 4x^2}{x^2 x_0^2}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{4x^2 - 4x_0^2}{x^2 x_0^2 (x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{4(x^2 - x_0^2)}{x^2 x_0^2 (x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{4(x - x_0)(x + x_0)}{x^2 x_0^2 (x - x_0)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{4(x + x_0)}{x^2 x_0^2} = \frac{4(x_0 + x_0)}{x_0^2 x_0^2} = \frac{4 \cdot 2x_0}{x_0^4} = \frac{8}{x_0^3} = f'(x_0). \end{aligned}$$

Wir erhalten damit als Ableitungsfunktion (für jedes reelle $x \neq 0$): $f'(x) = \frac{8}{x^3}$.