

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Ableitungsfunktion

Aufgabe: Bestimme zur (für jedes reelle $x \geq 0$ definierten) Wurzelfunktion:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

die Ableitungsfunktion $f'(x)$.

Lösung (mit der x-Methode): I. Allgemein gilt: Für eine Funktion $f: D_f \rightarrow \mathbf{R}$ und ein $x_0 \in D_f$ heißt $f'(x_0)$ im Falle der Differenzierbarkeit von f in x_0 die Ableitung der Funktion f im Punkt x_0 . Die Ableitung $f'(x_0)$ ist die Steigung von f in x_0 , die Ableitungen in allen Punkten $x \in D_f$ bilden die Ableitungsfunktion $f': D_f \rightarrow \mathbf{R}$ mit der Funktionsvorschrift $f'(x)$. Die Ableitung $f'(x_0)$ zu einer Funktion f in einem

Punkt x_0 bestimmt sich als Grenzwert des Differenzenquotienten $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Existenz der Ableitung in x_0 bedeutet also Existenz des Grenzwertes, des Differenzialquotienten.

II. Wir betrachten, indem wir in $f(x)$ für x die Stelle $x_0 \in D_f$ einsetzen, schließlich $x - x_0$ im Differenzenquotienten (auch unter Verwendung der 3. binomischen Formel) wegekürzen und den Grenzprozess durchführen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{\sqrt{x}^2 - \sqrt{x_0}^2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} &= \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = f'(x_0). \end{aligned}$$

Wir erhalten damit als Ableitungsfunktion (für jedes reelle $x \neq 0$): $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

III. Die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist für $x \geq 0$ definiert, die Ableitungsfunktion $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ für $x > 0$.

An der Stelle $x=0$ ist die Wurzelfunktion also nicht differenzierbar. Entsprechend gilt:

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow +\infty;$$

mit anderen Worten: die Tangente an die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x=0$ im Koordinatenursprung $O(0|0)$ ist die y-Achse.