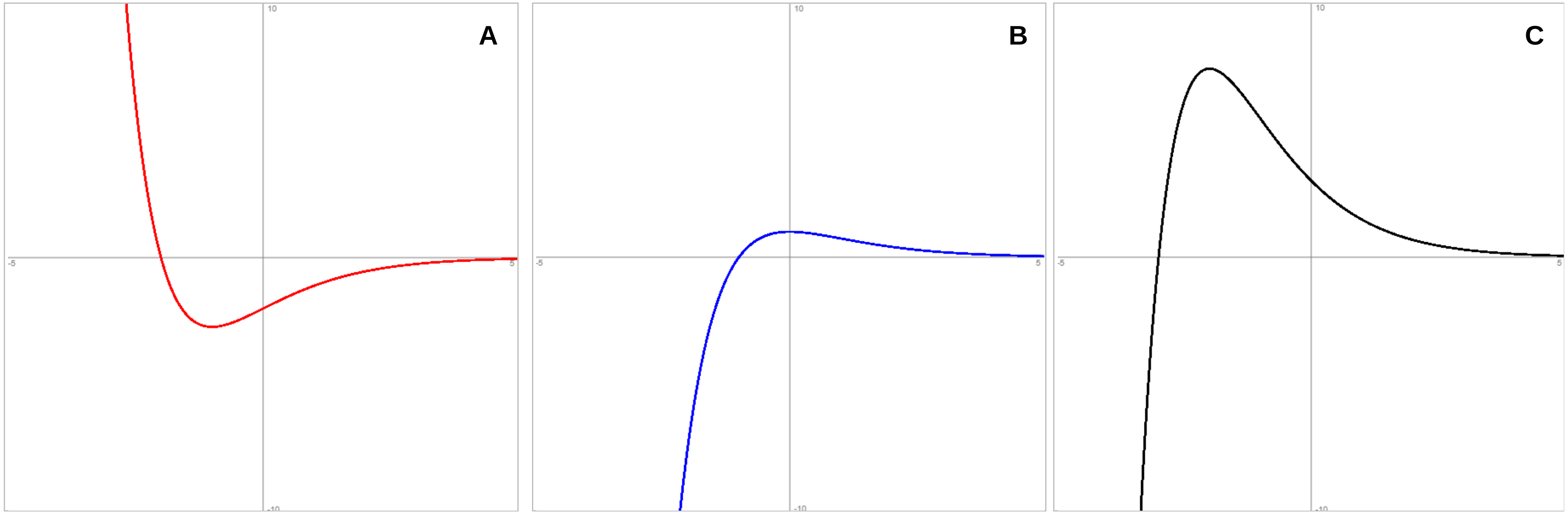
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Grafisches Ab- und Aufleiten

Aufgabe: In den drei Abbildungen sind eine Funktion f(x), deren 1. Ableitung f'(x) und die Stammfunktion F(x) als Kurven dargestellt (Abbildung A, B, C):



Ordne die Kurven den Funktionen F(x), f(x) und f'(x) zu. Begründe die Zuordnung.

Lösung: I. Folgende Zuordnung von Abbildung und Funktion ist korrekt:

Abbildung C: Stammfunktion F(x)
Abbildung A: Funktion f(x)
Abbildung B: Ableitung f'(x).

II. Die Zuordnung ergibt sich aus folgenden Überlegungen zum grafischen Ab- und Aufleiten:

Bzgl. der Null-, Extrem- und Wendestellen sowie der Monotonie und Krümmung ergibt sich der folgende Zusammenhang zwischen Funktionen f(x), Ableitungen f'(x), f''(x) und Stammfunktionen F(x) und bei asymptotischem Verhalten:

Stammfunktion F(x)	**Funktion f(x)**
Hochpunkt bei x_E	Nullstelle bei x_E VZW von + nach -
Tiefpunkt bei x_E	Nullstelle bei x_E VZW von - nach +
steigende Monotonie in x	$f(x) \geq 0$
fallende Monotonie in x	$f(x) \leq 0$
Wendestelle bei x_W	Hoch-/Tiefpkt bei x_W
Wendestelle als Sattelpunkt bei x_W	(doppelte) Nullstelle bei x_W Hoch-/Tiefpkt bei x_W
Linkskrümmung in x	steigende Monotonie in x
Rechtskrümmung in x	fallende Monotonie in x
$x \to \pm\infty$: $F(x) \to ax + C$	$x \to \pm\infty$: $f(x) \to a$
$x \to \pm\infty$: $F(x) \to C$	$x \to \pm\infty$: $f(x) \to 0$

Funktion f(x)	**Ableitung f'(x)**
Hochpunkt bei x_E	Nullstelle bei x_E VZW von + nach -
Tiefpunkt bei x_E	Nullstelle bei x_E VZW von - nach +
steigende Monotonie in x	$f'(x) \geq 0$
fallende Monotonie in x	$f'(x) \leq 0$
Wendestelle bei x_W	Hoch-/Tiefpkt bei x_W
Wendestelle als Sattelpunkt bei x_W	(doppelte) Nullstelle bei x_W Hoch-/Tiefpkt bei x_W
Linkskrümmung in x	steigende Monotonie in x, $[f''(x) \geq 0]$
Rechtskrümmung in x	fallende Monotonie in x, $[f''(x) \leq 0]$
$x \to \pm\infty$: $f(x) \to ax + C$	$x \to \pm\infty$: $f'(x) \to a$
$x \to \pm\infty$: $f(x) \to C$	$x \to \pm\infty$: $f'(x) \to 0$

Es gilt also im Allgemeinen beim Ableiten:

$$Wendestelle \xrightarrow{'} Extremstelle \xrightarrow{'} Nullstelle \text{ ,}$$

beim Aufleiten:

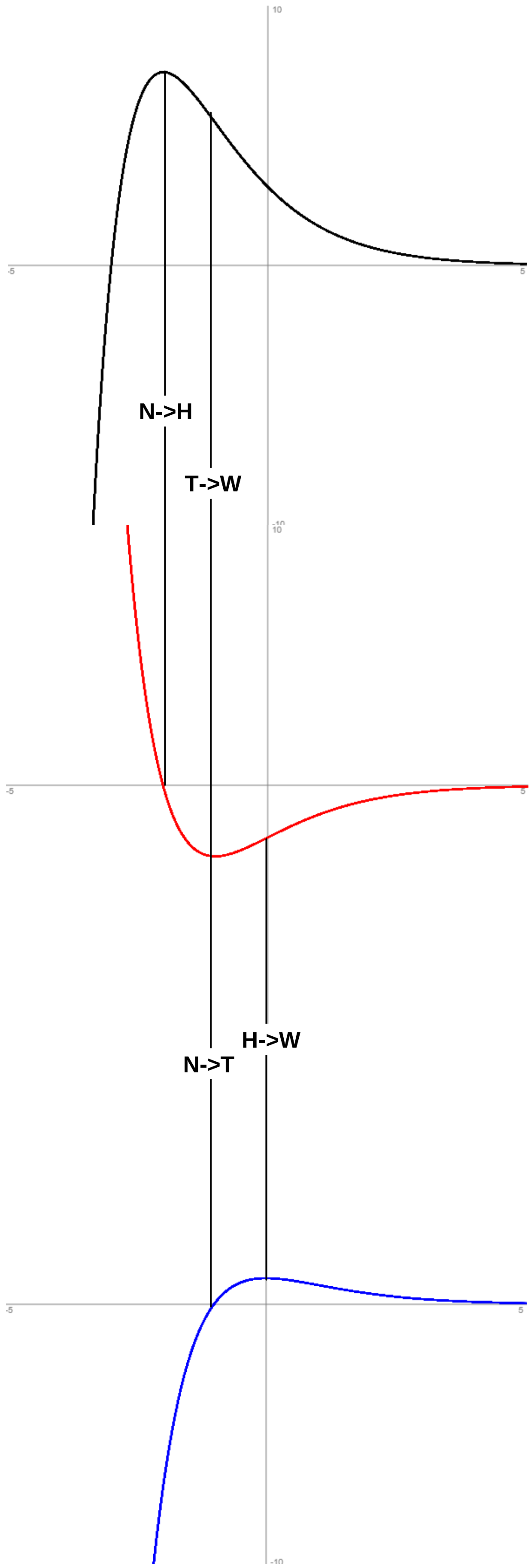
$$Nullstelle \xrightarrow{\int} Extremstelle \xrightarrow{\int} Wendestelle$$

oder die NEW-Regel:

```
F(x)    N E W
f(x)      N E W
f'(x)       N E W
```

Symmetrieeigenschaften (zur y-Achse, zum Ursprung) spielen auch eine Rolle:

a) Die Ableitung f'(x) einer achsensymmetrischen Funktion f(x) ist punktsymmetrisch. b) Die Ableitung f'(x) einer punktsymmetrischen Funktion f(x) ist achsensymmetrisch. c) Für eine punktsymmetrische Funktion f(x) ist jede Stammfunktion F(x) achsensymmetrisch. d) Für eine achsen-symmetrische Funktion f(x) existiert eine punktsymmetrische Stammfunktion mit F(0) = 0.



F(x), f(x), f'(x)