Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Grabhügel Magdalenenberg

Aufgabe: Der Grabhügel Magdalenenberg südwestlich des Ortzentrums von Villingen (Stadt Villingen-Schwenningen) gehört der eisenzeitlichen Hallstattzeit (8. Jahrhundert-5. Jahrhundert, Mitte) an. Der Grabhügel wurde laut dendrochronologischer Datierung der Grabkammer um 616 v.Chr. aufgeschüttet, der Grabhügel enthielt 126 Gräber. Während das geplünderte Fürstengrab nur noch wenige Funde enthielt, war die Fundausbeute in den zu Nachbestattungen gehörenden Gräbern reichhaltig. Stangensetzungen aus Holzstangen wurden auf der Hügelkuppe archäologisch beobachtet. Insgesamt hat der Grabhügel einen Durchmesser von ca. 102 m bei einer Höhe von ca. 8 m. Der Grabhügel kann als rotationssymmetrisch um eine zentrale Achse angenommen werden.

a) Bestimme Umfang und Inhalt der Grundfläche, die der Grabhügel bedeckt.

b) Der Querschnitt durch die Achse im Zentrum des Grabhügels lässt entlang der Hügeloberfläche annähernd eine Parabel 2. Grades entstehen. Gib unter Einrichtung eines geeigneten x-y-Koordinatensystems die Funktionsvorschrift für diese Parabel an.

c) Wo ist der Grabhügel am steilsten, unter welchem Winkel ragt der Hügel aus der Erdoberfläche heraus? Wie groß ist die durchschnittliche prozentuale Steigung am Grabhügel? Wie groß ist die prozentuale Steigung am Grabhügel in einer Höhe von 4 m?

d) Unter Verwendung des x-y-Koordinatensystems und der ermittelten Funktionsvorschrift ist der Inhalt der zentralen Querschnittfläche des Grabhügels zu berechnen.

e) Durch Rotation der zentralen Querschnittfläche soll der Rauminhalt des Grabhügels berechnet werden.

f) Ermittle den Oberflächeninhalt der Hügelkuppe. Um wie viel Prozent ist der Oberflächeninhalt der Hügelkuppe größer als der der Grundfläche des Grabhügels?

Lösung: a) Aus der Rotationssymmetrie um die zentrale Achse, die senkrecht zur als eben angenommenen Erdoberfläche steht und die maximale Höhe des Grabhügels beinhaltet, ergibt sich, dass die Grundfläche ein Kreis mit Durchmesser d = 102 m ist. Der Radius des Kreises ist folglich: r = d/2 = 51 m. Gemäß der Formel für den Umfang der Grundfläche $u = 2\pi r$ folgt:

$u = 2\pi \cdot 51 = 320{,}44$ m.

Die Formel für den Flächeninhalt der Grundfläche $G = \pi r^2$ führt auf:

$G = \pi \cdot 51^2 = 8171{,}28\ \text{m}^2$.

b) Wir setzen als zu suchende Funktion eine Parabel 2. Grades voraus; die Funktion f(x) besitzt in einem x-y-Koordinatensystem mit der Erdoberfläche als x-Achse und der Rotationsachse des Grabhügels als y-Achse also die Funktionsvorschrift: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Die von der Funktion eingeschlossene zentrale Querschnittfläche enthält die Mitte der Hügelkuppe als Hochpunkt H(0|8) von f(x) und die Stellen, an denen die Hügelkuppe auf die Erdoberfläche trifft, als Nullstellen N(-51|0), N(51|0) von f(x). Es folgt damit die Berechnung der Koeffizienten a, b, c der Funktion:

I. Ganz rationale Funktion: Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Eigenschaften:
(1) Punkt N(-51|0) als Nullstelle: f(-51) = 0 -> Gleichung: $a\cdot(-51)^2 + b\cdot(-51) + c = 0$
(2) Punkt H(0|8): f(0) = 8 -> Gleichung: $a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = 8$
(3) Punkt N(51|0) als Nullstelle: f(51) = 0 -> Gleichung: $a\cdot 51^2 + b\cdot 51 + c = 0$

II. Koeffizientenbestimmung: 3x3-Gleichungssystem (Dreiecksgestalt)

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrl} +2601a & -51b & +1c & = 0 \\ & & +1c & = 8 \\ +2601a & +51b & +1c & = 0 \end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrr|r} 2601 & -51 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 2601 & 51 & 1 & 0 \end{array}$$

1. Schritt: 1*(*3*) - 1*(*1*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 2601 & -51 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 102 & 0 & 0 \end{array}$$

Zeilentausch: (*2*) <-> (*3*) /

$$\begin{array}{rrr|r} 2601 & -51 & 1 & 0 \\ 0 & 102 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}$$

2. Schritt: (keine Umformung) /

$$\begin{array}{rrr|r} 2601 & -51 & 1 & 0 \\ 0 & 102 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrl} +2601a & -51b & +1c & = 0 \\ & +102b & & = 0 \\ & & +1c & = 8 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

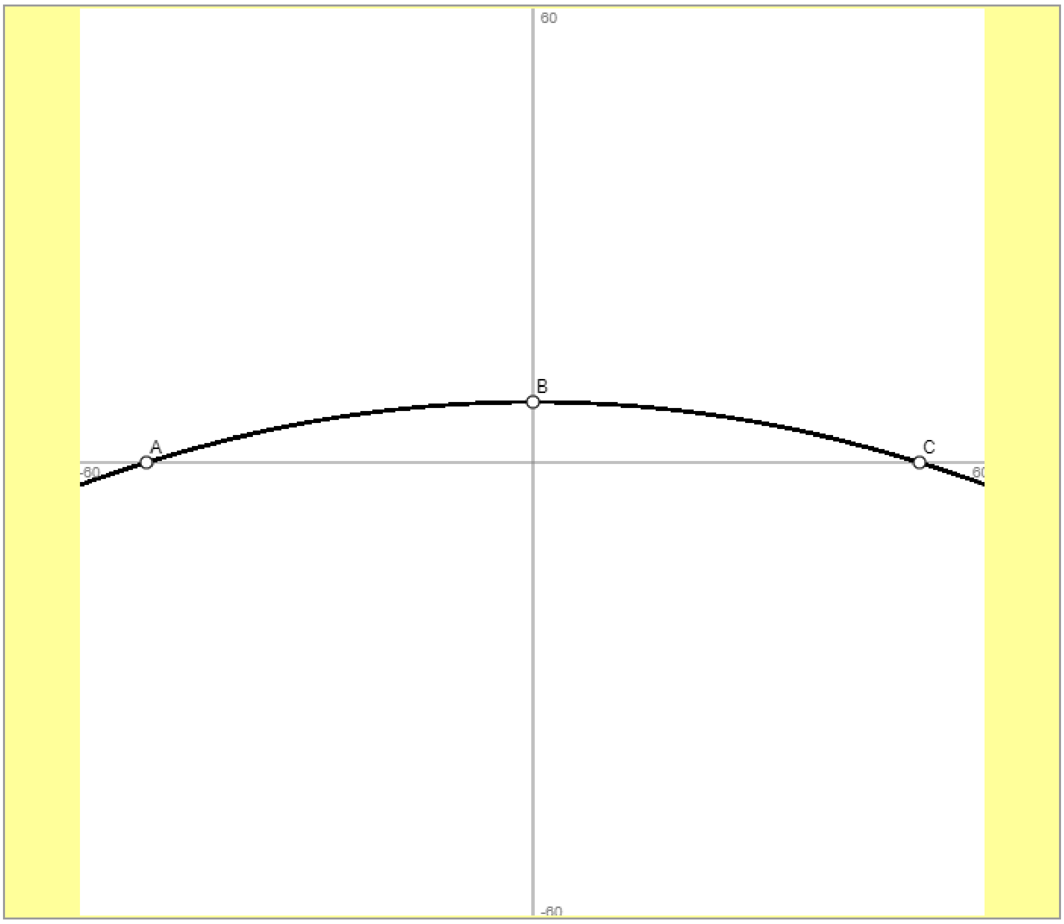
$c = 8$
$b = 0$
$a = -0.0030757400999615533$

III. Funktion: $f(x) = -0.0031x^2 + 8$

IV. Wertetabelle, Graph: $f(x) = -0.0031x^2 + 8$; $f'(x) = -0.0062x$; $f''(x) = -0.0062$; $f'''(x) = 0$

Wertetabelle:					
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**f'''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-51	0	0.3137	-0.0062	0	Nullstelle N(-51|0)
0	8	0	-0.0062	0	Schnittpunkt $S_y(0\|8)$ = Hochpunkt H(0|8)
51	0	-0.3137	-0.0062	0	Nullstelle N(51|0)

Graph:



Der Funktionsterm der Parabel 2. Grades lautet also: $f(x) = -0{,}0031x^2 + 8$ für $-51 \leq x \leq 51$. Die Parabel ist insbesondere symmetrisch zur y-Achse des x-y-Koordinatensystems.

c) I. Wir bilden zu $f(x) = -0{,}0031x^2 + 8$ die 1. Ableitung als: $f'(x) = -0{,}0062x$. Nullsetzen der 1. Ableitung ergibt:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -0{,}0062x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

mit $f'(0) = 0$ am Hochpunkt H(0|8). Hier ist die Ableitung (betragsmäßig) am kleinsten, der Grabhügel also eben. Die betragsmäßig <u>größte Steigung</u> liegt für x = -51 bzw. x = 51 vor mit:

$f'(-51) = |f'(51)| = |-0{,}0062 \cdot 51| = 0{,}3137 = m$.

Der <u>Steigungswinkel</u> φ an den Stellen x = -51 bzw. x = 51 beträgt wegen tan(φ) = m:

$\varphi = \tan^{-1}(0{,}3137) = 17{,}42°$.

II. Die <u>durchschnittliche Steigung</u> am Grabhügel bestimmt sich mit dem Differenzenquotienten aus den Punkten N(-51|0) und H(0|8) mit:

$$m = \frac{8-0}{0-(-51)} = \frac{8}{51} = 0{,}1569,$$

das sind prozentual 15,69 %.

III. Wir bestimmen bzgl. $f(x) = -0{,}0031x^2 + 8$ die Punkte auf der Hügelkuppe, die in einer Höhe von 4 m liegen und haben:

$f(x) = 4 \Leftrightarrow -0{,}0031x^2 + 8 = 4 \Leftrightarrow -0{,}0031x^2 = -4 \Leftrightarrow x^2 = 1290{,}32 \Leftrightarrow x = \pm 35{,}92$, so dass die Punkte $P_1(-35,92|4)$, $P_2(35,92|4)$ auf Funktion f(x) und Hügelkuppe liegen. Wir erhalten als Steigung:

f'(-35,92) = |f'(35,92)| = |-0,0062·35,92| = 0,2227 = m,

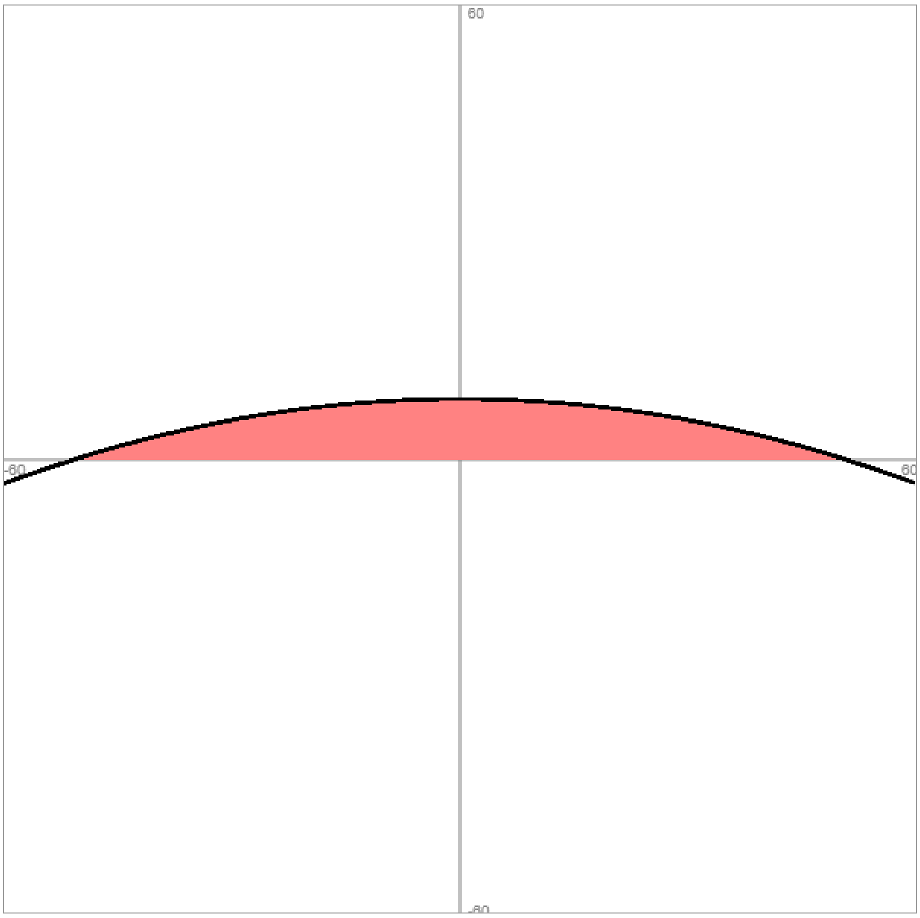
d.h. prozentual 22,27 %.

d) Die zentrale <u>Querschnittfläche</u> A_Q berechnet sich im oben definierten x-y-Koordinatensystem als Fläche bzw. Integral zwischen Funktion f(x) und x-Achse. Somit gilt vermöge $A_Q = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$:

$$A_Q = \int_{-51}^{51} f(x)dx \underset{Achsensymmetrie}{=} 2\cdot\int_{0}^{51} f(x)dx = 2\cdot\int_{0}^{51}(-0{,}0031x^2+8)dx = 2\cdot\left[-\frac{0{,}0031}{3}x^3+8x\right]_0^{51} =$$

$$2\cdot\left(-\frac{0{,}0031}{3}\cdot 51^3+8\cdot 51\right)-0 = 541{,}85\ \text{m}^2.$$

Die Querschnittfläche des Grabhügels ist damit A_Q = 541,85 m^2 groß.



e) I. Wir drehen das x-y-Koordinatensystem, indem wir die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ zu $y = f(x) = -0{,}0031x^2 + 8$ bestimmen und diese um die neue x-Achse rotieren lassen, um das Volumen eines Rotationskörpers zu erhalten. Es gilt:

$y = f(x) = -0{,}0031x^2 + 8$	(Vertauschen von x und y)
$x = -0{,}0031y^2 + 8$	$\mid -8$
$x-8 = -0{,}0031y^2$	$\mid :(-0{,}0031)$
$\frac{x-8}{-0{,}0031} = y^2$	(Ausrechnen)
$2580{,}65 - 322{,}58x = y^2$	$\mid \sqrt{}$
$y = f^{-1}(x) = \sqrt{2580{,}65 - 322{,}58x}$	

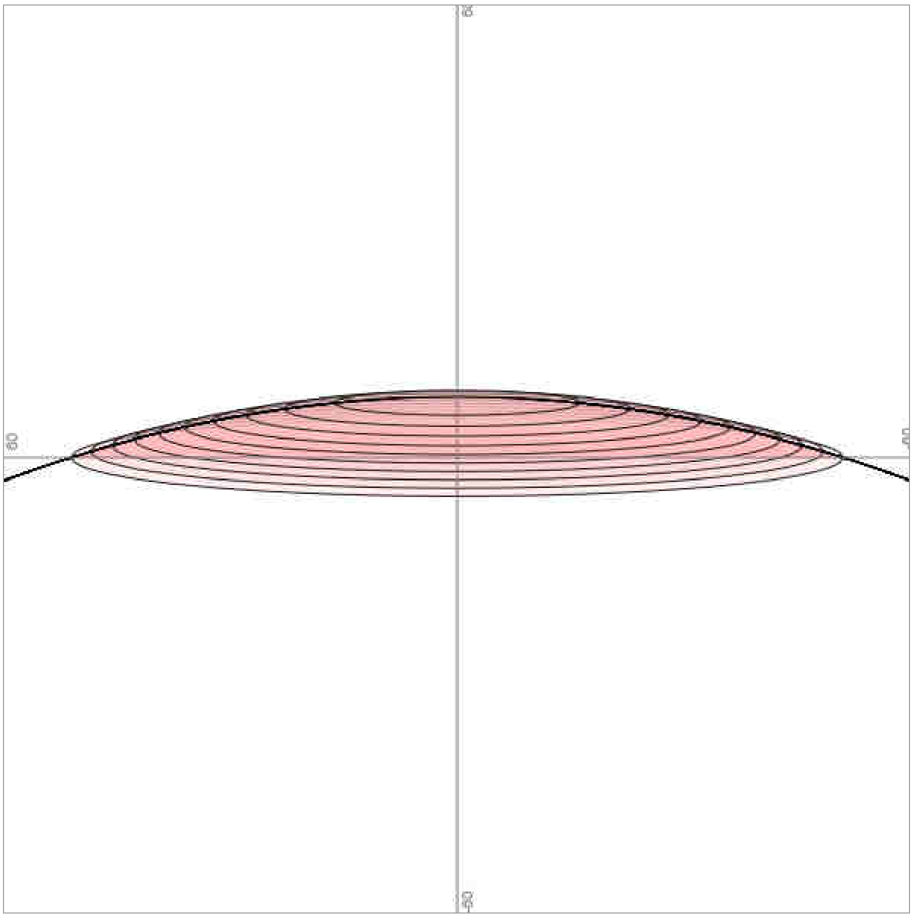
Die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{2580{,}65 - 322{,}58x}$ ist definiert auf dem Intervall [0; 8] (maximale Höhe des Grabhügels), so dass das durch Rotation entstehende Volumenintegral von der Form $V = \pi\int_{x_1}^{x_2}\left(f^{-1}(x)\right)^2 dx$ wie folgt berechnet werden kann:

$$V = \pi\int_0^8\left(f^{-1}(x)\right)^2 dx = \pi\int_0^8\left(\sqrt{2580{,}65 - 322{,}58x}\right)^2 dx = \pi\int_0^8 (2580{,}65 - 322{,}58x)dx =$$

$$\pi\left[2580{,}65x - \frac{322{,}58}{2}x^2\right]_0^8 = \pi\left[2580{,}65x - 161{,}29x^2\right]_0^8 = \pi\left(2580{,}65\cdot 8 - 161{,}29\cdot 8^2\right) - 0 =$$

$10322{,}64\pi$ = 32429,53 m^3.

Der Rauminhalt des Grabhügels beträgt damit: V = 32429,53 m^3.



II. Eine andere Vorgehensweise zur Volumenbestimmung geht in einem x-y-z-Koordinatensystem von einer zweidimensionalen Funktion $f^*(x,y)$ als Fortsetzung von $f(x) = -0{,}0031x^2 + 8$ aus. Es ist dabei $f^*(x,y) = 8 - 0{,}0031x^2 - 0{,}0031y^2$ die Funktion, die ein zur z-Achse symmetrisches Paraboloid im Dreidimensionalen beschreibt. Das Volumen des Grabhügels lässt sich als Integral zwischen $f^*(x,y)$ und einem Kreis auf der x-y-Ebene beschreiben. Der Kreis hat gemäß Aufgabe a) den Radius r = 51 m, so dass das Kreisgebiet K mit $x^2 + y^2 \le 51^2$ umschrieben werden kann. Das Volumenintegral $V = \int_K f^*(x,y)d(x,y)$ kann dabei am besten durch Einführung der Zylinderkoordinaten:

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$z = 8 - 0{,}0031\cdot(r\cos\varphi)^2 - 0{,}0031\cdot(r\sin\varphi)^2 = 8 - 0{,}0031\cdot r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 8 - 0{,}0031\cdot r^2$$

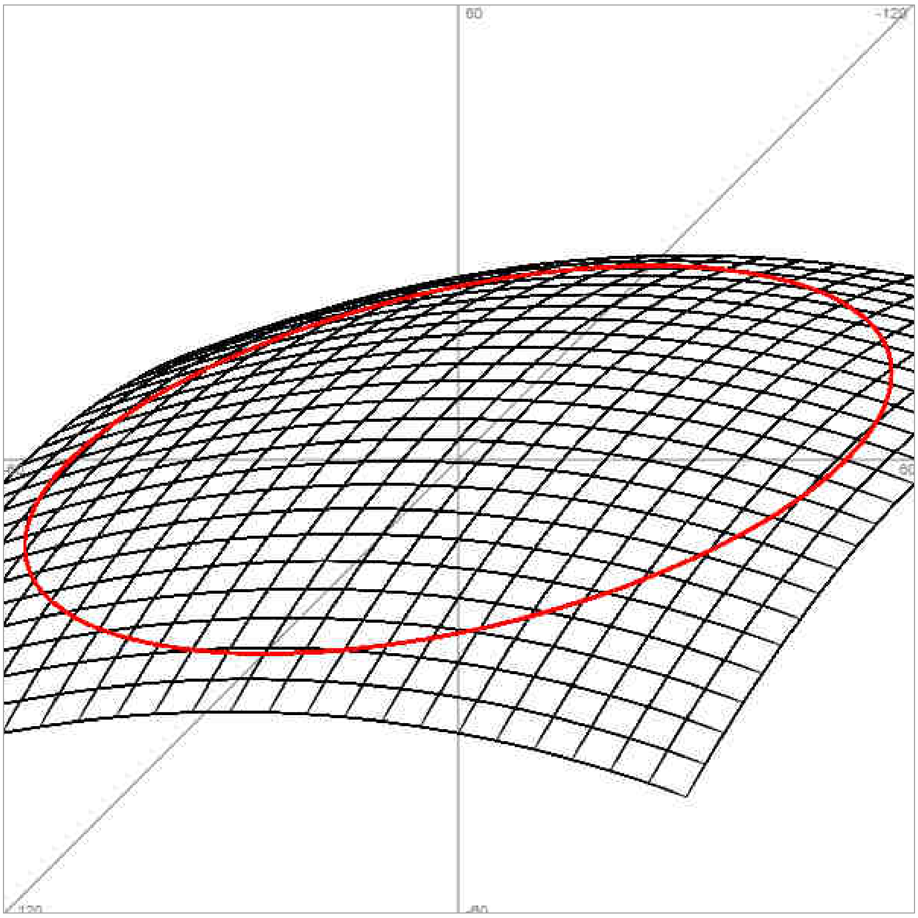
für z = f*(x,y) bei: d(x,y) = dφrdr errechnet werden als:

$$V = \int_{x^2+y^2\le 51^2} f^*(x,y)d(x,y) = \int_0^{51}\left[\int_0^{2\pi} z d\varphi\right] rdr = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{51}(8-0{,}0031r^2)rdr\right]d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{51}(8r-0{,}0031r^3)dr\right]d\varphi = \int_0^{2\pi}\left[4r^2 - \frac{0{,}0031}{4}r^4\right]_0^{51}d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(4\cdot 51^2 - \frac{0{,}0031}{4}\cdot 51^4 - 0\right)d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} 5160{,}97 d\varphi = [5160{,}97\varphi]_0^{2\pi} = 5160{,}97\cdot 2\pi - 0 = 32427{,}33 \text{ m}^3,$$

womit ein annähernd gleiches Ergebnis zu I. erzielt wurde.



f) Wir verwenden die zweidimensionale Funktion $f^*(x,y) = 8 - 0{,}0031x^2 - 0{,}0031y^2$ weiter, um den Oberflächeninhalt der Hügelkuppe zu berechnen. Zur Ermittlung des Inhalts einer Oberfläche S einer Funktion f*(x,y) ist das Oberflächenintegral unter Benutzung der 1. partiellen Ableitungen $f^*_x(x,y)$, $f^*_y(x,y)$ als: $\int_S dO = \int_{(S)} \sqrt{1 + (f^*_x(x,y))^2 + (f^*_y(x,y))^2}\, d(x,y)$ zu verwenden. Wir haben damit gemäß d), II. das Integrationsgebiet K = (S) mit $x^2 + y^2 \le 51^2$, weiter die 1. partiellen Ableitungen $f^*_x(x,y) = -0{,}0062x$, $f^*_y(x,y) = -0{,}0062y$ sowie Zylinderkoordinaten:

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

mit:

$$1+(f^*_x(x,y))^2+(f^*_y(x,y))^2 = 1+0{,}00003844x^2+0{,}00003844y^2 =$$

$$1+0{,}00003844\cdot(r\cos\varphi)^2+0{,}00003844\cdot(r\sin\varphi)^2 = 1+0{,}00003844\cdot r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) =$$

$$1+0{,}00003844r^2.$$

Das Oberflächenintegral berechnet sich als:

$$O = \int\limits_{x^2+y^2\le 51^2}\sqrt{1+(f^*_x(x,y))^2+(f^*_y(x,y))^2}\,d(x,y) = \int\limits_{x^2+y^2\le 51^2}\sqrt{1+(-0{,}0062x)^2+(-0{,}0062y)^2}\,d(x,y) =$$

$$\int\limits_{x^2+y^2\le 51^2}\sqrt{1+0{,}00003844x^2+0{,}00003844y^2}\,d(x,y) = \int_0^{51}\left[\int_0^{2\pi}\sqrt{1+0{,}00003844r^2}\,d\varphi\right]rdr =$$

$$\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{51}r\sqrt{1+0{,}00003844r^2}\,dr\right]d\varphi \underset{\left\{\substack{z=1+0{,}00003844r^2\\ \frac{dz}{0{,}00007688}=rdr}\right\}}{=} \int_0^{2\pi}\left[\int_1^{1{,}1}\sqrt{z}\,\frac{dz}{0{,}00007688}\right]d\varphi =$$

$$\frac{1}{0{,}00007688}\int_0^{2\pi}\left[\int_1^{1{,}1}z^{\frac{1}{2}}dz\right]d\varphi = 13007{,}28\cdot\int_0^{2\pi}\left[\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right]_0^{1{,}1}d\varphi = 13007{,}28\cdot\int_0^{2\pi}\left(\frac{2}{3}\cdot 1{,}1^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\cdot 1\right)d\varphi =$$

$$13007{,}28\cdot\int_0^{2\pi}0{,}1025\,d\varphi = 1332{,}72\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi = 1332{,}72\cdot[\varphi]_0^{2\pi} = 1332{,}72\cdot 2\pi = 8373{,}75\ \text{m}^2.$$

Wegen der relativen Flachheit des Grabhügels bei einer Höhe von 8 m und einem Durchmesser von 102 m ist der Oberflächeninhalt der Hügelkuppe nur wenig größer als der Inhalt der Grundfläche. Das Verhältnis der Inhalte von Hügelkuppen- und Grundfläche beträgt dann mit O = 8373,75 m^2 und gemäß a) G = 8171,28 m^2:

$$\frac{O}{G} = \frac{8373{,}75}{8171{,}28} = 1{,}0248 = 102{,}48\ \%,$$

so dass die Oberfläche der Hügelkuppe um 102,48 % – 100 % = 2,48 % größer als die Grundfläche des Grabhügels ist.

Abkürzungen: m = Meter, m^2 = Quadratmeter, m^3 = Kubikmeter.

www.michael-buhlmann.de / 09.2021 / Aufgabe 1474