Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Beweis

Aufgabe: a) Beweise: Jede ganz rationale Funktion 3. Grades hat mindestens eine Nullstelle.

b) Beweise: Jede ganz rationale Funktion 3. Grades besitzt genau einen Wendepunkt. Unter welcher Bedingung ist der Wendepunkt ein Sattelpunkt?

c) Beweise: Jede ganz rationale Funktion 3. Grades ist punktsymmetrisch zum Wendepunkt.

Lösung: a) Eine ganz rationale Funktion 3. Grades f: **R** -> **R** habe die Form: $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ für reelle a, b, c, d mit a≠0. Gemäß dem Schema:

$a_n>0$	n ungerade	n gerade
x->-∞:	f(x) -> -∞	f(x) -> +∞
x->+∞:	f(x) -> +∞	f(x) -> +∞

$a_n<0$	n ungerade	n gerade
x->-∞:	f(x) -> +∞	f(x) -> -∞
x->+∞:	f(x) -> -∞	f(x) -> -∞

(mit $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ganz rational) gilt für die hier betrachtete Funktion $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ mit ungeradem Grad 3:

<u>a>0</u>: x -> -∞ => f(x) -> -∞, x -> +∞ => f(x) -> +∞
<u>a<0</u>: x -> -∞ => f(x) -> +∞, x -> +∞ => f(x) -> -∞,

woraus folgt, dass es (mindestens) zwei reelle Zahlen x_1 und x_2 gibt mit: $f(x_1) < 0$ und $f(x_2) > 0$. Es gibt mithin zwei Punkte $P(x_1|f(x_1))$ und $Q(x_2|f(x_2))$ auf der Funktionskurve, die unterhalb bzw. oberhalb der x-Achse des kartesischen x-y-Koordinatensystems liegen. Mithin muss es wegen der Stetigkeit von ganz rationalen Funktionen eine <u>Nullstelle</u> $N(x_0|0)$ geben, die gemäß dem sog. Zwischenwertsatz (Nullstellensatz) für stetige Funktionen zwischen den Punkten P und Q auf der x-Achse liegt mit: $x_1 < x_0 < x_2$ bzw.: $x_1 > x_0 > x_2$ und: $f(x_1) < 0 = f(x_0) < f(x_2)$. Damit existiert mindestens eine Nullstelle der Funktion f(x), was zu beweisen war.

b) I. Eine ganz rationale Funktion 3. Grades f: **R** -> **R** habe die Form: $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ für reelle a, b, c, d mit a≠0. Wendepunkte einer Funktion f(x) bestimmen wir durch Nullsetzen der 2. Ableitung f''(x) und Überprüfung der gefundenen x-Werte mit Hilfe der 3. Ableitung f'''(x). Wir leiten die Funktion $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ ab und erhalten:

$f'(x) = 3ax^2+2bx+c$
$f''(x) = 6ax+2b$
$f'''(x) = 6a$.

Nullsetzen der 2. Ableitung führt auf:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6ax+2b = 0 \Leftrightarrow 6ax = -2b \Leftrightarrow x = -\frac{2b}{6a} = -\frac{b}{3a}$.

Einsetzen von $x = -\frac{b}{3a}$ in die 3. Ableitung ergibt:

$f'''(-\frac{b}{3a}) = 6a \neq 0$,

so dass an der Stelle x = $-\frac{b}{3a}$ in der Tat ein <u>Wendepunkt</u> vorliegt mit:

$W(-\frac{b}{3a} \mid \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d)$

wegen: $f(-\frac{b}{3a}) = a(-\frac{b}{3a})^3+b(-\frac{b}{3a})^2+c(-\frac{b}{3a})+d = -\frac{b^3}{27a^2} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d$. Die ganz rationale Funktion 3. Grades besitzt mithin genau einen Wendepunkt. Wir kürzen noch ab:

$x_0 = -\frac{b}{3a}$, $y_0 = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d$.

II. Ein <u>Sattelpunkt</u> liegt vor, wenn der Wendepunkt der ganz rationalen Funktion 3. Grades $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ an der Stelle x_0 eine waagerechte Tangente besitzt, d.h., es gilt: $f'(x_0) = 0$ mit $x_0 = -\frac{b}{3a}$. Wir erhalten damit auf Grund von $f'(x) = 3ax^2+2bx+c$ die Gleichung und Umformung:

$f'(-\frac{b}{3a}) = 0 \Leftrightarrow 3a(-\frac{b}{3a})^2+2b(-\frac{b}{3a})+c = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{3a} - \frac{2b^2}{3a} + c = 0 \Leftrightarrow -2b^2+b+3ac = 0 \Leftrightarrow$

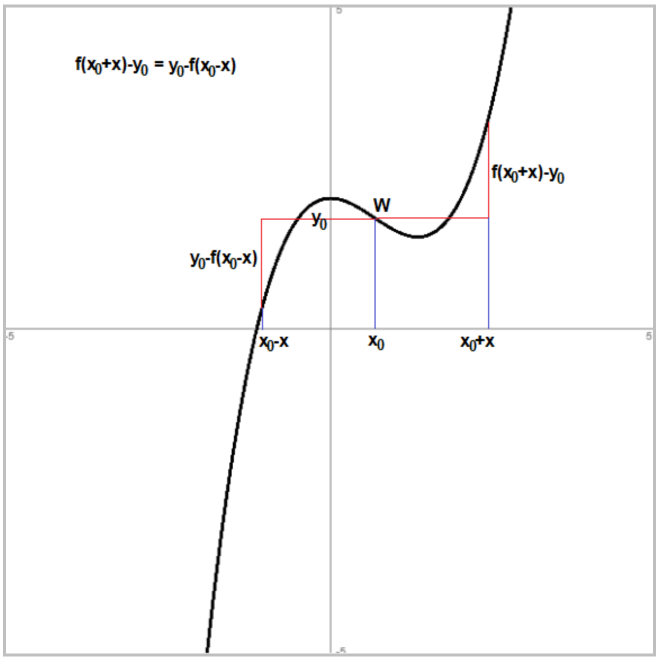
$3ac = 2b^2-b \Leftrightarrow 3ac = b(2b-1) \Leftrightarrow c = \frac{b(2b-1)}{3a}$.

Erfüllen die a, b, c der ganz rationalen Funktion $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ die Bedingung:

$c = \frac{b(2b-1)}{3a}$,

so ist der einzige Wendepunkt der Funktion auch ein Sattelpunkt.

c) I. Allgemein haben wir bei der <u>Punktsymmetrie</u> einer Funktion f(x) hinsichtlich eines Punktes $W(x_0|y_0)$ die folgende Situation:



Punktsymmetrie um einen Punkt $W(x_0|y_0)$ besteht also, wenn für alle reellen x (aus dem Definitionsbereich der Funktion) die Bedingung:

$f(x_0+x) - y_0 = y_0 - f(x_0-x)$ (*)

erfüllt ist. Umformen von (*) ergibt noch:

$f(x_0+x) - y_0 = y_0 - f(x_0-x) \Leftrightarrow f(x_0+x) = 2y_0 - f(x_0-x) \Leftrightarrow f(x_0+x) + f(x_0-x) = 2y_0$ (**).

Die Bedingung (**) werden wir im Folgenden verwenden.

II. Wir weisen die Punktsymmetrie der ganz rationalen Funktion 3. Grades $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ für reelle a, b, c, d mit $a\neq 0$ zum Wendepunkt $W(x_0|y_0)$ mit $x_0 = -\frac{b}{3a}$, $y_0 = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d$ nach, indem wir zunächst $f(x_0+x)$ und $f(x_0-x)$ bestimmen als:

$$f(x_0+x) = f(-\frac{b}{3a}+x) = a(-\frac{b}{3a}+x)^3+b(-\frac{b}{3a}+x)^2+c(-\frac{b}{3a}+x)+d =$$

$$a\left(-\frac{b^3}{27a^3}+\frac{b^2x}{3a^2}-\frac{bx^2}{a}+x^3\right)+b\left(\frac{b^2}{9a^2}-\frac{2bx}{3a}+x^2\right)+c\left(-\frac{b}{3a}+x\right)+d$$

$$f(x_0-x) = f(-\frac{b}{3a}-x) = a(-\frac{b}{3a}-x)^3+b(-\frac{b}{3a}-x)^2+c(-\frac{b}{3a}-x)+d =$$

$$a\left(-\frac{b^3}{27a^3}-\frac{b^2x}{3a^2}-\frac{bx^2}{a}-x^3\right)+b\left(\frac{b^2}{9a^2}+\frac{2bx}{3a}+x^2\right)+c\left(-\frac{b}{3a}-x\right)+d\,.$$

Addition der Terme $f(x_0+x)$ und $f(x_0-x)$ ergibt:

$f(x_0+x) + f(x_0-x) =$

$$a\left(-\frac{b^3}{27a^3}+\frac{b^2x}{3a^2}-\frac{bx^2}{a}+x^3\right)+b\left(\frac{b^2}{9a^2}-\frac{2bx}{3a}+x^2\right)+c\left(-\frac{b}{3a}+x\right)+d\ +$$

$$a\left(-\frac{b^3}{27a^3}-\frac{b^2x}{3a^2}-\frac{bx^2}{a}-x^3\right)+b\left(\frac{b^2}{9a^2}+\frac{2bx}{3a}+x^2\right)+c\left(-\frac{b}{3a}-x\right)+d\ =$$

$$a\left(-\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{2bx^2}{a}\right)+b\left(\frac{2b^2}{9a^2}+2x^2\right)+c\left(-\frac{2b}{3a}\right)+2d\ =\ -\frac{2b^3}{27a^2}-2bx^2+\frac{2b^3}{9a^2}+2bx^2-\frac{2bc}{3a}+2d\ =$$

$$\frac{4b^3}{27a^2}-\frac{2bc}{3a}+2d=2\left(\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{bc}{3a}+d\right) = 2y_0.$$

Die Punktsymmetrie ist damit nachgewiesen.

www.michael-buhlmann.de / 10.2018 / Aufgabe 627