Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Beweis

Aufgabe: Bekanntlich ist eine Funktion f(x) achsensymmetrisch zur y-Achse des x-y-Koordinatensystems (gerade), wenn gilt:

$$f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \varepsilon D_f,$$

punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems (ungerade), wenn gilt:

$$f(x) = -f(-x) \text{ für alle } x \varepsilon D_f.$$

Beweise:

a) Das Vielfache einer zur y-Achse achsensymmetrischen bzw. zum Ursprung punktsymmetrischen Funktion ist wieder achsensymmetrisch zur y-Achse bzw. punktsymmetrisch zum Ursprung.

b) Die Summe von zur y-Achse achsensymmetrischen bzw. zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen ist wieder achsensymmetrisch zur y-Achse bzw. punktsymmetrisch zum Ursprung.

c) Das Produkt von zwei zur y-Achse achsensymmetrischen bzw. zwei zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Das Produkt einer zur y-Achse achsensymmetrischen mit einer zum Ursprung punktsymmetrischen Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

d) Der Quotient von zwei zur y-Achse achsensymmetrischen bzw. zwei zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Der Quotient aus einer zur y-Achse achsensymmetrischen und einer zum Ursprung punktsymmetrischen Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

e) Ist eine auf D_f differenzierbare Funktion f(x) zur y-Achse achsensymmetrisch bzw. zum Ursprung punktsymmetrisch, dann ist deren Ableitung punktsymmetrisch zum Ursprung bzw. achsensymmetrisch zur y-Achse (Symmetriewechsel beim Ableiten).

f) Ist eine Funktion f(x) zur y-Achse achsensymmetrisch, auf D_f differenzierbar und an der Stelle x = 0 definiert, so besitzt die Funktion auf der y-Achse einen Extrempunkt.

Lösung: a) I. Es sei u(x) eine zur y-Achse achsensymmetrische Funktion mit: u(-x) = u(x). Dann ist für eine beliebige reelle Zahl r die Funktion $f(x) = r \cdot u(x)$ zur y-Achse achsensymmetrisch wegen:

$f(-x) = r \cdot u(-x) = r \cdot u(x) = f(x)$.

II. Es sei u(x) eine zum Ursprung punktsymmetrische Funktion mit: u(-x) = -u(x). Dann ist für eine beliebige reelle Zahl r die Funktion $f(x) = r \cdot u(x)$ zum Ursprung punktsymmetrisch wegen:

$f(-x) = r \cdot u(-x) = r \cdot (-u(x)) = -r \cdot u(x) = -f(x)$.

b) I. Es seien u(x), v(x) zur y-Achse achsensymmetrische Funktionen mit: u(-x) = u(x), v(-x) = v(x). Dann ist die Funktion f(x) = u(x) + v(x) zur y-Achse achsensymmetrisch wegen:

$f(-x) = u(-x) + v(-x) = u(x) + v(x) = f(x)$.

II. Es seien u(x), v(x) zum Ursprung punktsymmetrische Funktionen mit: u(-x) = -u(x), v(-x) = -v(x). Dann ist die Funktion f(x) = u(x) + v(x) zum Ursprung punktsymmetrisch wegen:

$f(-x) = u(-x) + v(-x) = -u(x) – v(x) = -(u(x)+v(x)) = -f(x)$.

c) I. Es seien u(x), v(x) zur y-Achse achsensymmetrische Funktionen mit: u(-x) = u(x), v(-x) = v(x). Dann ist die Funktion f(x) = u(x)·v(x) zur y-Achse achsensymmetrisch wegen:

f(-x) = u(-x)·v(-x) = u(x)·v(x) = f(x).

II. Es seien u(x), v(x) zum Ursprung punktsymmetrische Funktionen mit: u(-x) = -u(x), v(-x) = -v(x). Dann ist die Funktion f(x) = u(x)·v(x) zur y-Achse achsensymmetrisch wegen:

f(-x) = u(-x)·v(-x) = (-u(x))·(-v(x)) = u(x)·v(x) = f(x).

III. Es sei u(x) zur y-Achse achsensymmetrisch, v(x) zum Ursprung punktsymmetrisch mit: u(-x) = u(x), v(-x) = -v(x). Dann ist die Funktion f(x) = u(x)·v(x) zum Ursprung punktsymmetrisch wegen:

f(-x) = u(-x)·v(-x) = u(x)·(-v(x)) = -u(x)·v(x) = -f(x).

d) Jeder Quotient zweier Funktionen f(x) = u(x)/v(x) kann als Produkt f(x) = u(x)·(1/v(x)) dargestellt werden, so dass die folgenden Überlegungen genügen und c) angewendet werden kann. Es gilt nämlich:

v(x) zur y-Achse achsensymmetrisch mit: v(-x) = v(x) => 1/v(-x) = 1/v(x) => 1/v(x) zur y-Achse achsensymmetrisch
v(x) zum Ursprung punktsymmetrisch mit: v(-x) = -v(x) => 1/v(-x) = 1/(-v(x)) = -1/v(x) => 1/v(x) zum Ursprung punktsymmetrisch.

e) I. Die Funktion f(x) sei differenzierbar und zur y-Achse achsensymmetrisch. Es ist wegen der vorausgesetzten Achsensymmetrie der Funktion f(x): f(-x) = f(x), f(-x-h) = f(-(x+h)) = f(x+h) für alle $x \in D_f$, h reell. Dann gilt für den Differenzenquotienten und die Ableitung an einer Stelle x:

$$f'(-x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-x-h) - f(-x)}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{-h} = -\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -f'(x),$$

d.h.: die Ableitungsfunktion f'(x) ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

II. Die Funktion f(x) sei differenzierbar und zum Ursprung punktsymmetrisch. Es ist wegen der vorausgesetzten Punktsymmetrie der Funktion f(x): f(-x) = -f(x), f(-x-h) = f(-(x+h)) = -f(x+h) für alle $x \in D_f$, h reell. Dann gilt für den Differenzenquotienten und die Ableitung an einer Stelle x:

$$f'(-x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-x-h) - f(-x)}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{-f(x+h) + f(x)}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{-(f(x+h) - f(x))}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x),$$

d.h.: die Ableitungsfunktion f'(x) ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

f) Die Funktion f(x) sei differenzierbar und zur y-Achse achsensymmetrisch. Wir betrachten die Ableitungen an der Stelle x = 0; es gilt auch auf Grund der Achsensymmetrie für den Wert der Ableitung f'(0):

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = g$$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0-h) - f(0)}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(-h) - f(0)}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{-h} = -\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = -g\ ,$$

d.h.: g = -g, woraus g = f'(0) = 0 folgt. An der Stelle x = 0 besitzt also die zur y-Achse achsensymmetrische Funktion f(x) eine waagerechte Tangente. Da nach e) die Ableitungsfunktion zum Ursprung punktsymmetrisch ist, muss die Ableitung f'(x) eine Nullstelle x = 0 (f'(0) = 0) mit Vorzeichenwechsel besitzen. Das bedeutet aber die Existenz eines Extrempunktes (Hoch-, Tiefpunkt) der Funktion f(x) auf der y-Achse.

www.michael-buhlmann.de / 12.2020 / Aufgabe 1218