Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Beweis

Aufgabe: Bekanntlich ist eine Funktion f(x) achsensymmetrisch zur y-Achse des x-y-Koordinatensystems, wenn gilt:

$$f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \varepsilon D_f,$$

punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems, wenn gilt:

$$f(x) = -f(-x) \text{ für alle } x \varepsilon D_f.$$

Zeige: Ist f(x) eine zum Ursprung des Koordinatensystems punktsymmetrische Funktion, so gilt für jede reelle Zahl a > 0:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0\,.$$

Lösung: I. Sei f(x) eine zum Ursprung des Koordinatensystems punktsymmetrische Funktion. Dann gilt laut Definition: f(-x) = -f(x). Jede Stammfunktion F(x) von f(x) ist aber zur y-Achse achsensymmetrisch. Denn ist F(x) differenzierbar und zur y-Achse achsensymmetrisch, dann gilt: F(-x) = F(x), F(-x-h) = F(-(x+h)) = F(x+h) für alle $x \varepsilon D_f$, h reell, und daher für den Differenzenquotienten und die Ableitung an einer Stelle x:

$$f(-x) = F'(-x) = \lim_{h->0} \frac{F(-x-h) - F(-x)}{-h} = \lim_{h->0} \frac{F(x+h) - F(x)}{-h} = -\lim_{h->0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = -F'(x) = -f(x),$$

d.h.: die Ableitungsfunktion f(x) ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Die Umkehrung gilt – Differenzierbarkeit vorausgesetzt – auf Grund der obigen Gleichungskette ebenfalls.

II. Das bestimmte Integral $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ für beliebiges reelles a > 0 errechnet sich mit zum Ursprung punktsymmetrischer Funktion f(x) und zur y-Achse achsensymmetrischer Stammfunktion F(x) wie folgt:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \left[F(x)\right]_{-a}^{a} = F(a) - F(-a) \underset{F(a)=F(-a)}{=} F(a) - F(a) = 0$$

und verschwindet wegen der aus der Achsensymmetrie folgenden Identität: F(a) = F(-a) in der Tat, womit alles bewiesen ist.

www.michael-buhlmann.de / 04.2021 / Aufgabe 1364