Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Beweis

Aufgabe: Zeige: Besitzt eine ganz rationale Funktion 3. Grades zwei Punkte mit waagerechter Tangente, so stellen diese den Hoch- und Tiefpunkt der Funktionskurve dar. Liegt nur ein Punkt mit waagerechter Tangente vor, so ist der Punkt der Sattelpunkt der Funktionskurve.

Lösung: I. Eine ganz rationale Funktion 3. Grades f: **R** -> **R** habe die Form: $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ für reelle a, b, c, d mit a≠0. Die ersten drei Ableitungen ergeben sich als:

$f'(x) = 3ax^2+2bx+c$
$f''(x) = 6ax+2b$
$f'''(x) = 6a$.

II. Nullsetzen der 1. Ableitung führt auf die Funktionspunkte mit waagerechter Tangente:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3ax^2+2bx+c = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-2b \pm \sqrt{(2b)^2 - 4\cdot 3a\cdot c}}{2\cdot 3a} = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}$.

III. Gibt es zwei solcher Punkte mit waagerechter Tangente, so muss der Radikand (unter der Wurzel) positiv sein, also $4b^2-12ac > 0$ gelten. Einsetzen in die 2. Ableitung führt dann auf:

$f''\left(\frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}\right) = 6a\left(\frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}\right) + 2b = -2b \pm \sqrt{4b^2 - 12ac} + 2b = \pm \sqrt{4b^2 - 12ac}$.

Für $x_1 = \frac{-2b + \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}$ ist damit $f''\left(\frac{-2b + \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}\right) > 0$, so dass dann ein Tiefpunkt vorliegt; $x_2 = \frac{-2b - \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}$ mit $f''\left(\frac{-2b - \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}\right) < 0$ steht dann für den Hochpunkt der Funktion. In der Tat besitzt die ganz rationale Funktion 3. Grades in diesem Fall zwei Extrempunkte.

IV. Gibt es nur einen solchen Punkt mit waagerechter Tangente, so muss der Radikand (unter der Wurzel) gleich Null sein, also $4b^2-12ac = 0$ gelten. Dann liegt eine waagerechte Tangente bei $x = \frac{-2b \pm 0}{6a} = -\frac{b}{3a}$ vor. Einsetzen von $x = -\frac{b}{3a}$ in die 2. und 3. Ableitung führt dann auf:

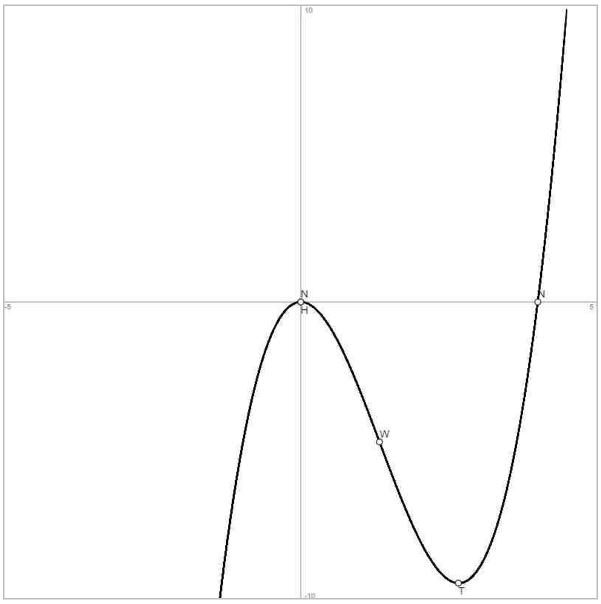
$f''\left(-\frac{b}{3a}\right) = 0 \Leftrightarrow 6a\cdot\left(-\frac{b}{3a}\right) + 2b = -2b + 2b = 0$

$f'''\left(-\frac{b}{3a}\right) = 6a \neq 0$,

so dass an der Stelle $x = -\frac{b}{3a}$ ein Wendepunkt existiert. Dieser ist auch ein Sattelpunkt wegen der bei $x = -\frac{b}{3a}$ vorliegenden waagerechten Tangente.

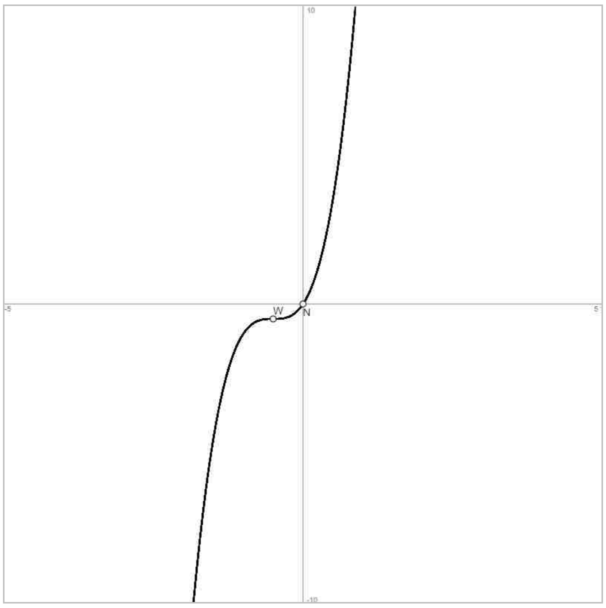
V. Es gilt noch die Zusammenfassung der Ergebnisse: Besitzt die ganz rationale Funktion 3. Grades die Form $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$, so folgt:

$b^2 > 3ac$: Es liegen ein Hoch- und Tiefpunkt als Extrempunkte vor (der Wendepunkt liegt auf der Funktionskurve genau zwischen dem Hoch- und dem Tiefpunkt).



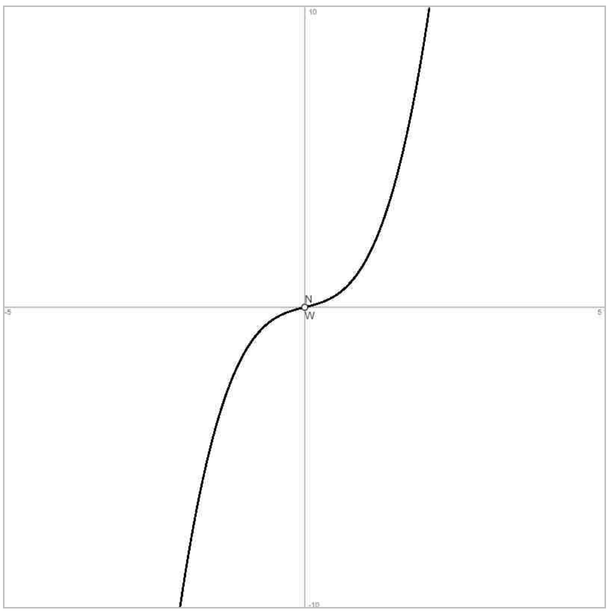
$f(x) = x^3 – 3x^2$
(mit: $a=1, b=-3, c=0 \Rightarrow (-3)^2 = 9 > 3\cdot1\cdot0 = 0$) ►

$b^2 = 3ac$: Es liegt ein Sattelpunkt vor (Extrempunkte fehlen).



$f(x) = 4x^3 +6x^2 + 3x$
(mit: $a=4, b=6, c=3 \Rightarrow 6^2 = 3\cdot4\cdot3 = 36$) ►

$b^2 < 3ac$: Es liegen weder Extrempunkte noch ein Sattelpunkt vor (aber ein Wendepunkt).



$f(x) = x^3 + 0,5x$
(mit: $a=1, b=0, c=0,5 \Rightarrow 0^2 = 0 < 3\cdot1\cdot0,5 = 1,5$) ►