Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Integration

Aufgabe: Bestimme zur Funktion f(x) mit:

$$f(x) = 3\mathrm{x} + \frac{2}{x}.$$

eine Stammfunktion F(x), deren Kurve im x-y-Koordinatensystem durch den Punkt P(1|4) verläuft.

Lösung: I. Wir benutzen für das Aufleiten des Funktionsterms die folgenden Integrationsregeln:

$$\int (u(x)+v(x))dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx \text{ (Summenregel)}$$

$$\int (ku(x))dx = k\int u(x)dx \text{ (multiplikative Konstante)}$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \text{ (Potenzregel, n}\neq\text{-1)}$$

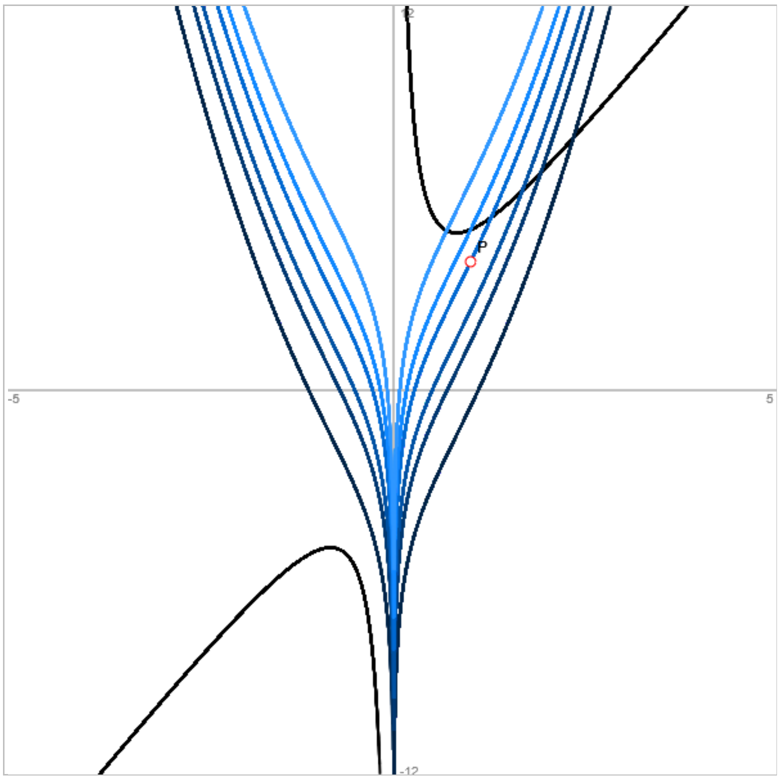
$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| \text{ (Potenzregel).}$$

II. Wir formen für Anwendung der Potenzregel beim Integrieren die Funktion noch etwas um:

$f(x) = 3\mathrm{x} + \frac{2}{x} = 3\mathrm{x} + 2\mathrm{x}^{-1}$,

erhalten für f(x) eine Summe von Potenzen und leiten die Funktion $f(x) = 3\mathrm{x} + 2\mathrm{x}^{-1}$ auf, indem wir Summen-, Faktor- und Potenzregel verwenden, d.h. es ergibt sich – unter Beachtung der Integration von Potenzen mit Exponenten -1 sowie der Integrationskonstante C – als (Menge von) Stammfunktion(en) F(x):

$F(x) = 3 \cdot \frac{1}{2}\mathrm{x}^2 + 2\ln|\mathrm{x}| + \mathrm{C} = \frac{3}{2}\mathrm{x}^2 + 2\ln|\mathrm{x}| + \mathrm{C}.$



Funktion f(x), Stammfunktionen F(x) (C=-2; 0; 1; 2,5; 2,5; 5), Punkt P

III. Die Integrationskonstante C bestimmt sich mit dem Kurvenpunkt P(1|4) der besonderen (zu suchenden) Stammfunktion F(x) gemäß der Beziehung:

P(1|4): F(1) = $\frac{3}{2} \cdot 1^2 + 2\ln|1| + C$ = 1,5 + 0 + C = 1,5 + C = 4,

woraus folgt:

C = 2,5.

Die gesuchte Stammfunktion F(x), deren Kurve im x-y-Koordinatensystem durch den Punkt P(1|4) verläuft, lautet damit:

$$F(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2\ln|x| + 2{,}5.$$

www.michael-buhlmann.de / 04.2020 / Aufgabe 1014