Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Integration

Aufgabe: Bestimme zur Funktion f(x) mit:

$$f(x) = \mathrm{x}^2 - 2x.$$

eine Stammfunktion F(x), deren Hochpunkt die y-Koordinate y = 5 besitzt.

Lösung: I. Wir benutzen für das Aufleiten des Funktionsterms die folgenden Integrationsregeln:

$$\int (u(x)+v(x))dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx \text{ (Summenregel)}$$

$$\int (ku(x))dx = k\int u(x)dx \text{ (multiplikative Konstante)}$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \text{ (Potenzregel, n≠-1).}$$

II. Wir leiten die Funktion $f(x) = \mathrm{x}^2 - 2x$ auf, indem wir Summen-, Faktor- und Potenzregel verwenden, d.h. es ergibt sich – unter Beachtung der Integrationskonstante C – als (Menge von) Stammfunktion(en) F(x):

$$F(x) = \frac{1}{3}\mathrm{x}^3 - 2\cdot\frac{1}{2}\mathrm{x}^2 + \mathrm{C} = \frac{1}{3}\mathrm{x}^3 + \mathrm{x}^2 + \mathrm{C}.$$

III. Die Stammfunktion(en) $F(x) = \frac{1}{3}\mathrm{x}^3 + \mathrm{x}^2 + \mathrm{C}$ haben dort eine Hochstelle x_0, wo: $F'(x_0) = 0$ und $F''(x_0) < 0$ gilt. Das ist aber wegen F'(x) = f(x) dann der Fall, wenn $f(x_0) = 0$ und $f'(x_0) = 0$ erfüllt ist. Wir bestimmen daher zunächst die Nullstellen der Funktion f(x) mit:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2–2x = 0 \Leftrightarrow x(x–2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x–2 = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2.$

Weiter ist:

f'(x) = 2x – 2,

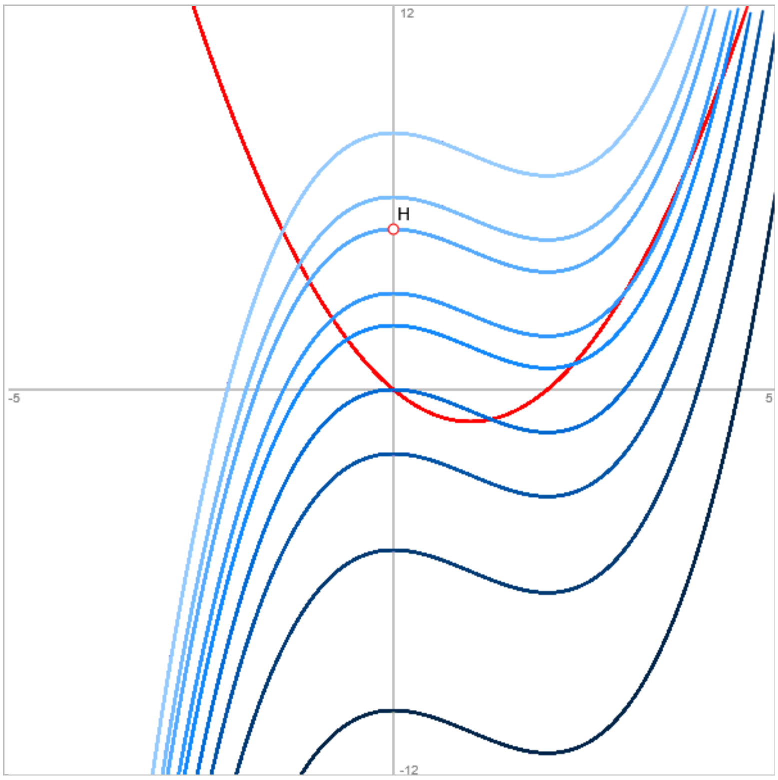
so dass

f'(0) = -2 < 0
f'(2) = 4–2 = 2 > 0

folgt. An der Stelle x = 0 liegt also ein Hochpunkt der Stammfunktion(en) F(x) vor. Einsetzen von x = 0 in den Funktionsterm F(x) führt auf:

F(0) = 0 + 0 +C = C,

der Hochpunkt hat also das (allgemeine) Aussehen H(0|C).



Funktion f(x), Stammfunktionen F(x) (C=-10; -5; -2; 0; 2; 3; 5; 6; 8), Punkt H

IV. Wegen x = 0 als Hochstelle der Stammfunktion(en) und y = 5 als y-Koordinate des Hochpunkts ist dieser von der Form H(0|5), womit sich im Vergleich zu H(0|C) als Integrationskonstante C = 5 ergibt. Die gesuchte Stammfunktion F(x), deren Kurve im x-y-Koordinatensystem also durch den Hochpunkt H(0|5) verläuft, lautet damit:

$$F(x) = \frac{1}{3}\mathrm{x}^3 + \mathrm{x}^2 + 5.$$

www.michael-buhlmann.de / 04.2020 / Aufgabe 1015