

# Mathematikaufgaben

## > Analysis

### > Bestimmungsaufgabe

---

**Aufgabe:** Eine ganz rationale Funktion 4. Grades ist von der Form

$$f(x) = ax^3(x-b)$$

und verläuft durch den Hochpunkt  $H(6|216)$ . Wie lautet die Funktionsgleichung?

**Lösung:** I. Ansatz:  $f(x)$  als ganz rationale Funktion 4. Grades besitzt die vorgegebene Produktform:

$$f(x) = ax^3(x-b)$$

mit zu suchenden Koeffizienten  $a, b \in \mathbf{R}$  und einer dreifachen Nullstelle  $N_1(0|0)$  sowie einer einfachen Nullstelle  $N_2(b|0)$ . Wegen der Existenz eines Hochpunkts bei  $H(6|216)$  ist noch die 1. Ableitung von  $f(x)$  einzubeziehen. Wir rechnen zunächst aus:

$$f(x) = ax^3(x-b) = ax^4 - abx^3$$

und leiten ab:

$$f'(x) = 4ax^3 - 3abx^2$$

(konstante Faktoren  $a$  bzw.  $-ab$ , Summen- und Potenzregel für das Ableiten).

II. Berechnung: Es gilt auf Grund der Hochpunkteigenschaft des Punktes  $H(6|216)$ :

$$f(6) = a \cdot 6^4 - ab \cdot 6^3 = 1296a - 216ab = 216 \Rightarrow 6a - ab = 1 \quad (1)$$

$$f'(6) = 4a \cdot 6^3 - 3ab \cdot 6^2 = 864a - 108ab = 0 \Rightarrow 8a - ab = 0 \quad (2)$$

( $H$  als Punkt  $\rightarrow f(6)=216$ ;  $H$  als Hochpunkt  $\rightarrow f'(6)=0$ ). Subtraktion der beiden Gleichungen (1) und (2) ergibt  $((2)-(1))$ :

$$(8a - ab) - (6a - ab) = 0 - 1 \Rightarrow 8a - ab - 6a + ab = -1 \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Einsetzen von  $a = -\frac{1}{2}$  etwa in die Gleichung (2) ergibt für den Koeffizienten  $b$ :

$$8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)b = 0 \Rightarrow -4 + \frac{1}{2}b = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}b = 4 \Rightarrow b = 8$$

Die gesuchte ganz rationale Funktion lautet damit:  $f(x) = -\frac{1}{2}x^3(x-8) = -\frac{1}{2}x^4 + 4x^3$ .

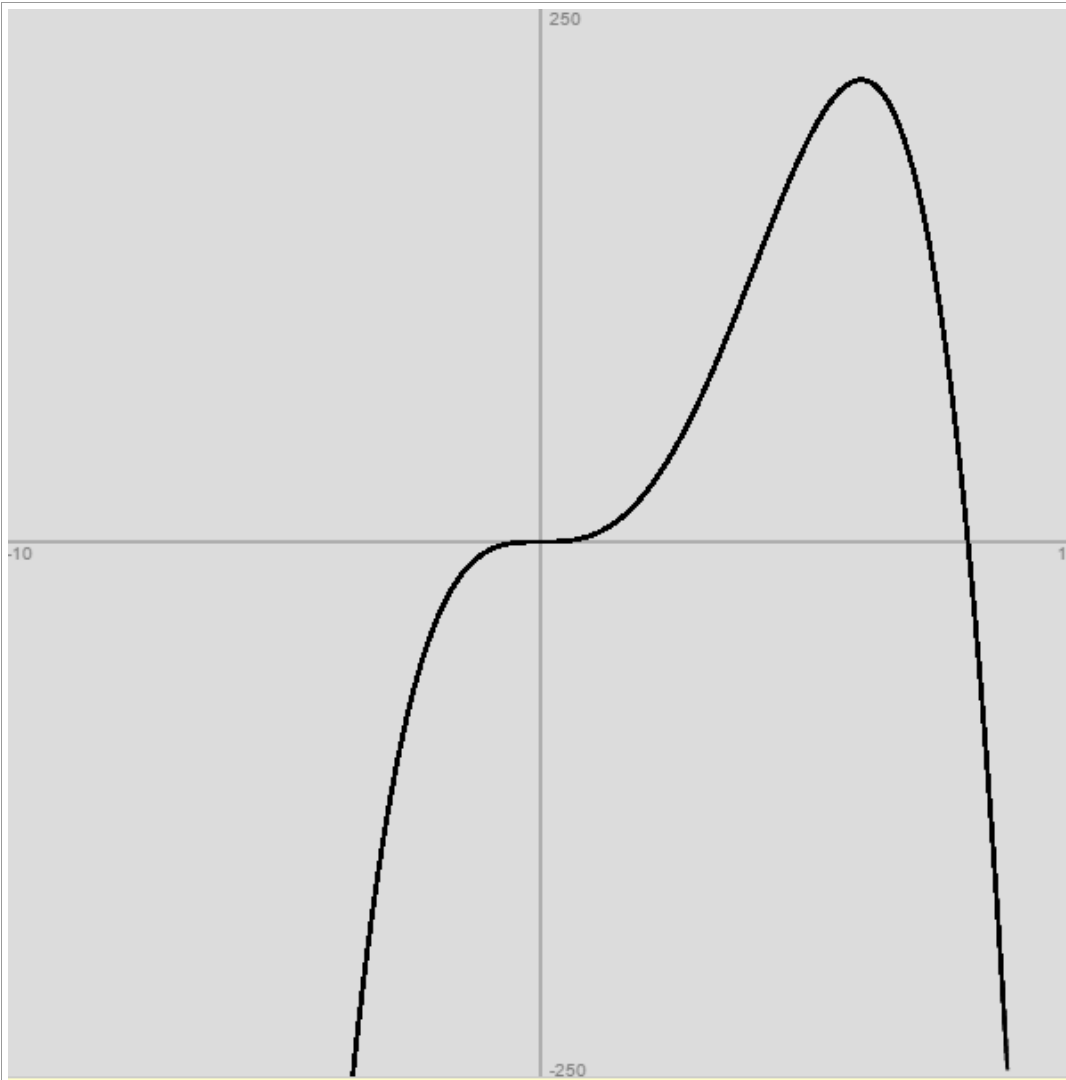
III. Wertetabelle, Graph:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3(x-8) = -\frac{1}{2}x^4 + 4x^3$$

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	0	0	0	Nullstelle N(0 0) = Schnittpunkt S <sub>y</sub> (0 0) = Wendepunkt W(0 0)
4	128	64	0	Wendepunkt W(4 128)
6	216	0	-72	Hochpunkt H(5.99 216)
8	0	-256	-192	Nullstelle N(8 0)

Graph:



www.michael-buhlmann.de / 04.2016 / Aufgabe 235