Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Die Kurve einer ganz rationalen Funktion 3. Grades y = f(x) verläuft durch den Ursprung des x-y-Koordinatensystems und besitzt an der Stelle x = 2 einen Wendepunkt mit Wendetangente t: y = -9x + 8/3. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung: I. Allgemein gilt bei Bestimmungsaufgaben für Funktionen y = f(x), dass die in der Aufgabenstellung angegeben Eigenschaften der Funktion in mathematische Gleichungen übertragen werden müssen. Die Funktion und deren Ableitungen werden dabei im Funktionsansatz als Funktionsterme mit noch zu bestimmenden Koeffizienten angegeben. Die mathematischen Gleichungen bilden dann ein (lineares) Gleichungssystem, das mit geeigneten mathematischen Verfahren (Gauß-Algorithmus u.a.) nach den zu bestimmenden Koeffizienten umgeformt werden muss. Einsetzen der Koeffizienten in den Funktionsansatz liefert die gesuchte Funktion, eine (eventuell vorzunehmende) Probe bestätigt oder widerlegt die Richtigkeit der gefundenen Funktion (notwendige und hinreichende Bedingungen bei Extrem- und Wendepunkten beachten).
Für ganz rationale Funktionen 2. bis 4. Grades ergibt sich die folgende Übersicht und Vorgehensweise:

Funktion 2. Grades	**Funktion 3. Grades**	**Funktion 4. Grades**
Funktion und Ableitungen:		
$f(x)=ax^2+bx+c$ $f'(x)=2ax+b$	$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ $f''(x)=6ax+2b$	$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$ $f''(x)=12ax^2+6bx+2c$
3 Unbekannte a, b, c-> 3 Funktionseigenschaften -> 3 Gleichungen	4 Unbekannte a, b, c, d -> 4 Funktionseigenschaften -> 4 Gleichungen	5 Unbekannte a, b, c, d, e -> 5 Funktionseigenschaften -> 5 Gleichungen
Lineare Gleichungen vom Typ:		
$f(x_1)=ax_1^2+bx_1+c=y_1$ $f'(x_2)=2ax_2+b=y_2$	$f(x_1)=ax_1^3+bx_1^2+cx_1+d=y_1$ $f'(x_2)=3ax_2^2+2bx_2+c=y_2$ $f''(x_3)=6ax_3+2b=y_3$	$f(x_1)=ax_1^4+bx_1^3+cx_1^2+dx_1+e=y_1$ $f'(x_2)=4ax_2^3+3bx_1^3+2cx_2+d=y_2$ $f''(x_3)=12ax_3^2+6bx_3+2c=y_3$
für bestimmte x- und y-Werte		

Aufstellen des linearen Gleichungssystems:

Gleichungen mit Unbekannten a, b, … gemäß den Funktionseigenschaften:

Punkt $P(x_1\|y_1)$:	$f(x_1) = y_1$
Nullstelle x_0 bzw. $N(x_0\|0)$:	$f(x_0) = 0$
Ursprung O(0|0) als Funktionspunkt:	f(0) = 0
y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0\|y_0)$:	$f(0) = y_0$
Schnittstelle x_1 mit Funktion g(x):	$f(x_1) = g(x_1)$
Steigung m in x_1:	$f'(x_1) = m$
Berührpunkt x_1 mit der x-Achse:	$f(x_1) = 0$, $f'(x_1) = 0$
Ursprung O(0|0) als Berührpunkt:	f(0) = 0, f'(0) = 0
Tangente y = mx+c in x_1:	$f(x_1) = y(x_1) = mx_1+c$, $f'(x_1) = m$
Normale y = mx+c in x_1:	$f(x_1) = y(x_1) = mx_1+c$, $f'(x_1) = -1/m$
Berührpunkt x_1 mit Funktion g(x):	$f(x_1) = g(x_1)$, $f'(x_1) = g'(x_1)$
Hoch-/Tiefpunkt x_E:	$f'(x_E) = 0$
Hoch-/Tiefpunkt $H/T(x_E\|y_E)$:	$f(x_E) = y_E$, $f'(x_E) = 0$

Wendepunkt x_W: Wendepunkt $W(x_W\|y_W)$: Wendetangente y = mx+c in x_W: Wendenormale y = mx+c in x_W:	$f''(x_W) = 0$ $f(x_W) = y_W$, $f''(x_W) = 0$ $f(x_W) = y(x_W) = mx_W+c$, $f'(x_W) = m$, $f''(x_W) = 0$ $f(x_W) = y(x_W) = mx_W+c$, $f'(x_W) = -1/m$, $f''(x_W) = 0$	
Sattelpunkt x_S: Sattelpunkt $S(x_S\|y_S)$:	$f'(x_S) = 0$, $f''(x_S) = 0$ $f(x_S) = y_S$, $f'(x_S) = 0$, $f''(x_S) = 0$	
Lösen des linearen Gleichungssystems (etwa mit dem Gauß-Algorithmus) -> Errechnung der Unbekannten a, b, … ->		
Aufstellen der Funktionsgleichung:		
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
(Probe)		

Im Fall von (Achsen-) Symmetrie zur y-Achse und (Punkt-) Symmetrie zum Ursprung des x-y-Koordinatensystems gilt die Vorgehensweise:

Funktion 2. Grades (Symmetrie zur y-Achse) (f(-x) = f(x))	**Funktion 3. Grades (Symmetrie zum Ursprung)** (f(-x) = -f(x))	**Funktion 4. Grades (Symmetrie zur y-Achse)** (f(-x) = f(x))
$f(x) = ax^2 + c$ $f'(x) = 2ax$	$f(x) = ax^3 + cx$ $f'(x) = 3ax^2 + c$ $f''(x) = 6ax$	$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ $f'(x) = 4ax^3 + 2cx$ $f''(x) = 12ax^2 + 2c$
2 Unbekannte a, c-> 2 Funktionseigenschaften -> 2 Gleichungen	2 Unbekannte a, c -> 2 Funktionseigenschaften -> 2 Gleichungen	3 Unbekannte a, c, e -> 3 Funktionseigenschaften -> 3 Gleichungen
Lineare Gleichungen vom Typ:		
$f(x_1) = ax_1^2 + c = y_1$ $f'(x_2) = 2ax_2 = y_2$	$f(x_1) = ax_1^3 + cx_1 = y_1$ $f'(x_2) = 3ax_2^2 + c = y_2$ $f''(x_3) = 6ax_3 = y_3$	$f(x_1) = ax_1^4 + cx_1^2 + e = y_1$ $f'(x_2) = 4ax_2^3 + 2cx_2 = y_2$ $f''(x_3) = 12ax_3^2 + 2c = y_3$
für bestimmte x- und y-Werte		
Aufstellen des linearen Gleichungssystems: Gleichungen mit Unbekannten a, c, … gemäß den Funktionseigenschaften:		
Punkt $P(x_1\|y_1)$: Nullstelle x_0 bzw. $N(x_0\|0)$: Ursprung O(0|0) als Funktionspunkt: y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0\|y_0)$: Schnittstelle x_1 mit Funktion g(x):	$f(x_1) = y_1$ $f(x_0) = 0$ $f(0) = 0$ $f(0) = y_0$ $f(x_1) = g(x_1)$	
Steigung m in x_1: Berührpunkt x_1 mit der x-Achse: Ursprung O(0|0) als Berührpunkt: Tangente y = mx+c in x_1: Normale y = mx+c in x_1: Berührpunkt x_1 mit Funktion g(x):	$f'(x_1) = m$ $f(x_1) = 0$, $f'(x_1) = 0$ $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ $f(x_1) = y(x_1) = mx_1+c$, $f'(x_1) = m$ $f(x_1) = y(x_1) = mx_1+c$, $f'(x_1) = -1/m$ $f(x_1) = g(x_1)$, $f'(x_1) = g'(x_1)$	
Hoch-/Tiefpunkt x_E: Hoch-/Tiefpunkt $H/T(x_E\|y_E)$:	$f'(x_E) = 0$ $f(x_E) = y_E$, $f'(x_E) = 0$	
Wendepunkt x_W: Wendepunkt $W(x_W\|y_W)$: Wendetangente y = mx+c in x_W: Wendenormale y = mx+c in x_W:	$f''(x_W) = 0$ $f(x_W) = y_W$, $f''(x_W) = 0$ $f(x_W) = y(x_W) = mx_W+c$, $f'(x_W) = m$, $f''(x_W) = 0$ $f(x_W) = y(x_W) = mx_W+c$, $f'(x_W) = -1/m$, $f''(x_W) = 0$	
Sattelpunkt x_S: Sattelpunkt $S(x_S\|y_S)$::	$f'(x_S) = 0$, $f''(x_S) = 0$ $f(x_S) = y_S$, $f'(x_S) = 0$, $f''(x_S) = 0$	
Lösen des linearen Gleichungssystems (etwa mit dem Gauß-Algorithmus) -> Errechnung der Unbekannten a, c, … ->		
Aufstellen der Funktionsgleichung:		
$f(x) = ax^2 + c$	$f(x) = ax^3 + cx$	$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$
(Probe)		

II. Allgemein gilt für das Lösen von linearen Gleichungssystemen die folgende <u>Vorgehensweise</u> gemäß dem sog. Gaußschen Algorithmus und der Umwandlung eines linearen Gleichungssystems in <u>Dreiecksgestalt</u> (Stufenform):

Zur Lösung komplexer linearer Gleichungssysteme verwendet man den Gaußschen Algorithmus, d.h. folgende Vorgehensweise: 1) Das lineare Gleichungssystem aus Gleichungen und Unbekannten wird in Matrixdarstellung umgeschrieben; eine Gleichung entspricht eine Zeile, einer Unbekannten einer Spalte in der Matrix, die rechte (Zahlen-) Seite des Gleichungssystems bildet die letzte Spalte der Matrix; die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten kann auch verschieden sein. 2) Beim Gaußschen Algorithmus werden, beginnend vom Anfangstableau, Nullen unter der Hauptdiagonalen wie folgt erzeugt: 1. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 1. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 2; ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 2, so werden alle Matrixelemente in Zeile 2 mit a multipliziert, alle Matrixelemente in Zeile 1 mit b multipliziert und Produkt minus Produkt als neue Matrixelemente der Zeile 2 gebildet (Vorgehensweise (*), auch unter Beachtung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen a und b). Ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*) usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 2. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 2. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 3; ist a das zweite Element in Zeile 2 und b das zweite Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*), und dies weiter für Zeile 4 usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 3. Schritt usw., bis die letzte Matrixspalte erreicht ist. Es entsteht dadurch das Endtableau des Algorithmus, das auf die Art der Lösungen und die Lösungen des linearen Gleichungssystems hinweist. 3) Im Fall einer eindeutigen Lösung gilt: Ist im Endtableau des Gaußschen Algorithmus die Dreiecksgestalt (Stufenform) gegeben, so gilt für die Variable z der letzten Spalte mit dem dazugehörenden Matrixelement $a\neq0$ und dem Element b der rechten Seite: $az = b \Leftrightarrow z = b/a$. / Für die Variable y der vorletzten Spalte mit dem dazugehörenden Matrixelement $c\neq0$, dem Matrixelement d und dem Element e der rechten Seite gilt: $cy+dz = e \Leftrightarrow$ $cy = e - db/a \Leftrightarrow y = e/c - db/(ac)$ / usw., bis die Variable der ersten Matrixspalte errechnet ist. 4) Die Lösungsmenge besteht in diesem Fall – wegen der Eindeutigkeit der Lösung – aus einem Zahlentupel, also: **L** = {(l|m|…|t)} mit reellen Zahlen l, m, … t.

III. <u>Ansatz</u>: Die Funktion f(x) als ganz rationale Funktion 3. Grades (allgemeine Parabel) wird dargestellt als:

$f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$

mit zu suchenden Koeffizienten a, b, c, d$\in$**R**. Da die in der Aufgabe vorgegebenen Eigenschaften der Funktion mit Tangente und Wendepunkt zu tun haben, sind wir angehalten, auch die 1. und 2. Ableitung der Funktion zu bilden:

$f'(x) = 3ax^2+2bx+c$
$f''(x) = 6ax+2b$.

IV. <u>Eigenschaften</u>: Um die vier im Ansatz enthaltenen Unbekannten a, b, c, d zu bestimmen, benötigen wir vier vorgegebene Eigenschaften der Funktion f(x). Der Verlauf der Funktionskurve durch den Ursprung des x-y-Koordinatensystems liefert eine Eigenschaft, die anderen drei resultieren aus den Eigenschaften der Funktion bzgl. des Wendepunktes an der Stelle x = 2.

Es gilt zunächst durch Punktprobe, also durch Einsetzen des Ursprungs O(0|0) des Koordinatensystems (x = 0, y = f(x) = 0) in den Ansatz $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$:

$f(0) = 0$

und:

$f(0) = a\cdot0^3+b\cdot0^2+c\cdot0+d$,

so dass die Identität:

$f(0) = a\cdot0^3+b\cdot0^2+c\cdot0+d = d = 0$

folgt. Mithin ist der Koeffizient d = 0 bestimmt. Der Funktionsansatz lautet jetzt wegen wegfallendem d: $f(x) = ax^3+bx^2+cx$.

Hinsichtlich des Wendepunkts an der Stelle x = 2 werten wir die Wendetangente t: y = -9x + 8/3 aus. Da Tangente und Funktion im Wendepunkt W(2|f(2)) (als Berührpunkt) im Funktionswert und in der Steigung (als Ableitung und Tangentensteigung) übereinstimmen müssen, gilt:

$f(2) = y(2) = -9\cdot2+8/3 = -46/3$
$f'(2) = y'(2) = y' = -9$,

so dass sich mit Einsetzen des Punktes W(2|-46/3) in den Ansatz $f(x) = ax^3+bx^2+cx$ bzw. der Tangentensteigung y' = -9 in den Ansatz $f'(x) = 3ax^2+2bx+c$ ergibt:

$f(2) = a\cdot2^3+b\cdot2^2+c\cdot2 = 8a+4b+2c = -46/3$ (I)

$f'(2) = 3a\cdot 2^2+2b\cdot 2+c = 12a+4b+c = -9$ (II).

Wir verwenden noch die Wendestelleneigenschaft des Punktes W(2|-46/3), wonach die 2. Ableitung der Funktion an der Stelle x = 2 verschwinden muss; damit gilt gemäß dem Ansatz $f''(x) = 6ax+2b$ die Beziehung:

$f''(0) = 6a\cdot 2+2b = 12a + 2b = 0$ (III).

V. Aufstellen des Gleichungssystems für die Koeffizienten der ganz rationalen Funktion: Mit dem Ansatz $f(x) = ax^3+bx^2+cx$ (wegen d = 0) sind noch die Koeffizienten a, b, c zu bestimmen. Dies geschieht über das Aufstellen und Lösen des folgenden linearen Gleichungssystems aus den verbliebenen drei Eigenschaftsgleichungen (I) bis (III). Als lineares Gleichungssystem mit den Variablen a, b, c ergibt sich durch Untereinanderschreiben der Gleichungen:

$8a+4b+2c = -46/3$ (I)
$12a+4b+c = -9$ (II)
$12a+2b = 0$ (III).

Das Gleichungssystem wird nachstehend mit Hilfe des Gauß-Algorithmus gelöst.

VI. Lösen des linearen Gleichungssystems, Bestimmung der Koeffizienten der ganz rationalen Funktion: Zur Lösung des linearen Gleichungssystems mit Hilfe des Gauß-Verfahrens multiplizieren wir wegen der bequemeren (und exakten) Rechenweise mit ganzen Zahlen Gleichung (I) mit dem Faktor 1,5 und erhalten:

$12a+6b+3c = -23$ (I)
$12a+4b+c = -9$ (II)
$12a+2b = 0$ (III)

als lineares Gleichungssystem mit ganzzahligen Koeffizienten. In Durchführung des Gauß-Verfahrens gehen wir dann wie folgt vor:

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} +\,12a + 6b + 3c &= -23 \\ +\,12a + 4b + 1c &= -9 \\ +\,12a + 2b &= 0 \end{aligned}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{ccc|c} 12 & 6 & 3 & -23 \\ 12 & 4 & 1 & -9 \\ 12 & 2 & 0 & 0 \end{array}$$

1. Schritt: 1*(*2*) - 1*(*1*) / 1*(*3*) - 1*(*1*) /

$$\begin{array}{ccc|c} 12 & 6 & 3 & -23 \\ 0 & -2 & -2 & 14 \\ 0 & -4 & -3 & 23 \end{array}$$

2. Schritt: -1*(*3*) + 2*(*2*) /

$$\begin{array}{ccc|c} 12 & 6 & 3 & -23 \\ 0 & -2 & -2 & 14 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} +\,12a + 6b + 3c &= -23 \\ -\,2b - 2c &= 14 \\ -\,1c &= 5 \end{aligned}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$c = -5$
$b = -2$
$a = 1/3$

Als Lösungen des linearen Gleichungssystems erhalten wir: a = 1/3, b = -2 und c = -5.

VII. Die Gleichung der ganz rationalen Funktion lautet mit a = 1/3, b = -2 und c = -5 und d = 0:

$f(x) = x^3/3 – 2x^2 – 5x$.

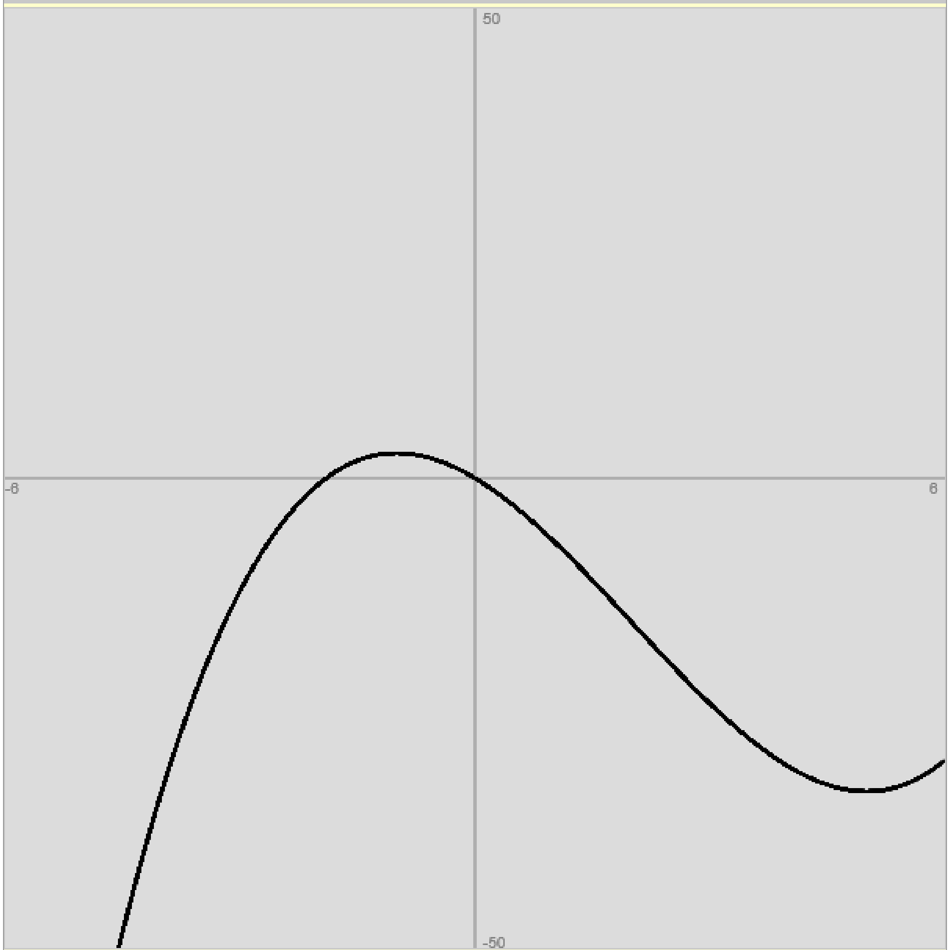
Das Durchführen einer Probe ist hier nicht notwendig, da der Punkt W(2|-46/3) wegen der Eigenschaften von allgemeinen ganz rationalen Funktionen 3. Grades ein Wendepunkt ist.

VIII. Wertetabelle, Graph:

Funktion: f(x) = f(x) = + 0.3333333333333333x^3 - 2x^2 - 5x

Wertetabelle:

x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**f'''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-1.89	0.0554	6.1321	-7.78	2	Nullstelle N(-1.89|0.06)
-1	2.6667	0	-6	2	Hochpunkt H(-1|2.67)
0	0	-5	-4	2	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0)
2	-15.3333	-9	0	2	Wendepunkt W(2|-15.33)
5	-33.3333	0	6	2	Tiefpunkt T(5|-33.33)



Funktion: f(x) = f(x) = + 0.3333333333333333x^3 - 2x^2 - 5x

1. Ableitung: f'(x) = f'(x) = + 1x^2 - 4x - 5

2. Ableitung: f''(x) = f''(x) = + 2x - 4

www.michael-buhlmann.de / 01.2018 / Aufgabe 550