Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Eine ganz rationale Funktion 3. Grades verläuft durch die Punkte P(-1|4), Q(0|12) und R(1|16) und S(2|22). Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung: I. Allgemein gilt bei Bestimmungsaufgaben für Funktionen y = f(x), dass die in der Aufgabenstellung angegeben Eigenschaften der Funktion in mathematische Gleichungen übertragen werden müssen. Die Funktion und deren Ableitungen werden dabei im Funktionsansatz als Funktionsterme mit noch zu bestimmenden Koeffizienten angegeben. Die mathematischen Gleichungen bilden dann ein (lineares) Gleichungssystem, das mit geeigneten mathematischen Verfahren (Gauß-Algorithmus u.a.) nach den zu bestimmenden Koeffizienten umgeformt werden muss. Einsetzen der Koeffizienten in den Funktionsansatz liefert die gesuchte Funktion, eine (eventuell vorzunehmende) Probe bestätigt oder widerlegt die Richtigkeit der gefundenen Funktion (notwendige und hinreichende Bedingungen bei Extrem- und Wendepunkten beachten).
Für ganz rationale Funktionen 3. Grades ergibt sich die folgende Übersicht und Vorgehensweise:

Funktionsansatz (ganz rationale Funktion vom Grad 3, Koeffizienten a, b, c, d):	$f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$
Punkt $P(x_1\|y_1)$ (Punktprobe für vorgegebenen Punkt): Punkt $Q(x_2\|y_2)$ (Punktprobe für vorgegebenen Punkt): Punkt $R(x_3\|y_3)$ (Punktprobe für vorgegebenen Punkt): Punkt $S(x_4\|y_4)$ (Punktprobe für vorgegebenen Punkt):	$f(x_1) = y_1$ $f(x_2) = y_2$ $f(x_3) = y_3$ $f(x_4) = y_4$
Aufstellen eines linearen Gleichungssystems mit den noch unbekannten Koeffizienten a, b, c, d	
Lösen des linearen Gleichungssystems, bestehend aus den Gleichungen der Punktproben; Berechnung der Koeffizienten a, b, c, d u.a. mit Hilfe des Gauß-Algorithmus	
Einsetzen der Koeffizienten a, b, c, d in den Funktionsansatz; Funktionsterm:	$f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$

II. Allgemein gilt für das Lösen von linearen Gleichungssystemen die folgende Vorgehensweise gemäß dem sog. Gauß-Algorithmus und der Umwandlung eines linearen Gleichungssystems in Dreiecksgestalt (Stufenform):

Zur Lösung komplexer linearer Gleichungssysteme verwendet man den Gaußschen Algorithmus, d.h. folgende Vorgehensweise: 1) Das lineare Gleichungssystem aus Gleichungen und Unbekannten wird in Matrixdarstellung umgeschrieben; eine Gleichung entspricht eine Zeile, einer Unbekannten einer Spalte in der Matrix, die rechte (Zahlen-) Seite des Gleichungssystems bildet die letzte Spalte der Matrix; die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten kann auch verschieden sein. 2) Beim Gaußschen Algorithmus werden, beginnend vom Anfangstableau, Nullen unter der Hauptdiagonalen wie folgt erzeugt: 1. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 1. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 2; ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 2, so werden alle Matrixelemente in Zeile 2 mit a multipliziert, alle Matrixelemente in Zeile 1 mit b multipliziert und Produkt minus Produkt als neue Matrixelemente der Zeile 2 gebildet (Vorgehensweise (*), auch unter Beachtung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen a und b). Ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*) usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 2. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 2. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 3; ist a das zweite Element in Zeile 2 und b das zweite Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*), und dies weiter für Zeile 4 usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 3. Schritt usw., bis die letzte Matrixspalte erreicht ist. Es entsteht dadurch das Endtableau des Algorithmus, das auf die Art der Lösungen und die Lösungen des linearen Gleichungssystems hinweist. 3) Im Fall einer eindeutigen Lösung gilt: Ist im Endtableau des Gaußschen Algorithmus die Dreiecksgestalt (Stufenform) gegeben, so gilt für die Variable z der letzten Spalte mit dem dazugehörenden Matrixelement $a \neq 0$ und dem Element b der rechten Seite: $az = b \Leftrightarrow z = b/a$. / Für die Variable y der vorletzten Spalte mit dem dazugehörenden Matrixelement $c \neq 0$, dem Matrixelement d und dem Element e der rechten Seite gilt: $cy+dz = e \Leftrightarrow$

$cy = e – db/a \Leftrightarrow y = e/c – db/(ac)$ / usw., bis die Variable der ersten Matrixspalte errechnet ist. 4) Die Lösungsmenge besteht in diesem Fall – wegen der Eindeutigkeit der Lösung – aus einem Zahlentupel, also: **L** = {(l|m|…|t)} mit reellen Zahlen l, m, … t.

III. Ansatz: f(x) als ganz rationale Funktion 3. Grades wird dargestellt als:

$f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$

mit zu suchenden Koeffizienten a, b, c, dε**R**.

IV. Punktproben: Wir wenden uns zunächst dem Punkt Q(0|12) mit x = 0 als x-Koordinate zu. Es gilt durch Punktprobe, also durch Einsetzen des Punktes (x = 0, y = f(x) = 5) in den Ansatz $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$:

$f(0) = 12$

und:

$f(0) = a\cdot 0^3 +b\cdot 0^2+c\cdot 0+d = d$,

so dass die Identität:

$d = 12$

folgt. Entsprechendes folgt für den Punkt P(-1|4), also:

$f(-1) = 4$, $f(-2) = a\cdot(-1)^3+b(-1)^2+c\cdot(-1)+d = -a+b–c+d$

mit:

$-a+b–c+d = -4$

und weiter für den Punkt R(1|16):

$f(1) = 16$, $f(1) = a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1+d = a+b+c+d$

mit:

$a+b+c+d = 16$

und schließlich für den Punkt S(2|22):

$f(2) = 22$, $f(2) = a\cdot 2^3+b\cdot 2^2+c\cdot 2+d = 8a+4b+2c+d$

mit:

$8a+4b+2c+d = 22$.

V. Aufstellen des Gleichungssystems für die Koeffizienten der ganz rationalen Funktion: Es ergibt sich damit das folgende lineare Gleichungssystem mit den vier Unbekannten a, b, c und d und den vier Gleichungen:

$d = 12$ (I)
$-a+b–c+d = 4$ (II)
$a+b+c+d = 16$ (III)
$8a+4b+2c+d = 22$ (IV),

so dass Einsetzen von d = 12 in die Gleichungen (II), (III) und (IV) zu einem Gleichungssystem mit den drei Unbekannten a, b, c und den drei Gleichungen:

$-a+b–c+12 = 4 \Rightarrow -a+b–c = -8$ (1)
$a+b+c+12 = 16 \Rightarrow a+b+c = 4$ (2)
$8a+4b+2c+12 = 22 \Rightarrow 8a+4b+2c = 10$ (3)

führt.

VI. Bestimmung der Koeffizienten der ganz rationalen Funktion: Um das obige Gleichungssystem der Gleichungen (1) bis (3) zu lösen, wenden wir das Gauß-Verfahren an, d.h. es gilt:

Lineares Gleichungssystem:

$- 1a + 1b - 1c = -8$

$+ 1a + 1b + 1c = 4$

$+ 8a + 4b + 2c = 10$

Anfangstableau:

-1 1 -1 | -8
1 1 1 | 4
8 4 2 | 10

1. Schritt: 1*(*2*) + 1*(*1*) / 1*(*3*) + 8*(*1*) /

-1   1 -1 | -8
 0   2 0 | -4
 0 12 -6 | -54

2. Schritt: 1*(*3*) - 6*(*2*) /

-1 1 -1 | -8
 0 2 0 | -4
 0 0 -6 | -30

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} -1a + 1b - 1c &= -8 \\ +2b \quad &= -4 \\ -6c &= -30 \end{aligned}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$c = 5$
$b = -2$
$a = 1$

Die Koeffizienten der ganz rationalen Funktion lauten hiermit: a = 1, b = -2, c = 5, d = 12.

VII. Funktionsgleichung: Mit a = 1, b = -2, c = 5 und d = 12 und dem Einsetzen der errechneten Koeffizienten in den Funktionsansatz: ax^3+bx^2+cx+d erhalten wir die Gleichung der gesuchten ganz rationalen Funktion 3. Grades als:

$f(x) = x^3–2x^2+5x+12$.

VIII. Wertetabelle, Graph:

Funktion: f(x) = f(x) = + 1x^3 - 2x^2 + 5x + 12

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-1.29	0.0751	15.1523	-11.74	6	Nullstelle N(-1.29|0.08)
0	12	5	-4	6	Schnittpunkt S_y(0|12)
0.67	14.753	3.6667	0.02	6	Wendepunkt W(0.67|14.75)