

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Eine ganz rationale Funktion $f(x)$ 4. Grades besitzt die Nullstellen $x = -2$, $x = 0$ (doppelt) und $x = 3$. Die Funktion verläuft zudem durch Punkt $P(-1|1)$. Wie lautet die Funktionsgleichung? Skizziere die Funktion und die ersten beiden Ableitungen $f'(x)$, $f''(x)$.

Lösung: I. Funktionsbestimmung: $f(x)$ als ganz rationale Funktion 4. Grades hat die Nullstellen $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ (doppelt) und $x_3 = 3$, so dass sie auf Grund der Nullstellen in Produktform geschrieben werden kann:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)^2(x - x_3) \quad (*)$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten $a \in \mathbf{R}$. (Dies gilt wegen des Hauptsatzes der Algebra, wonach reellwertige ganz rationale Funktionen in Linearfaktoren zerlegt werden können, wenn die Summe der Vielfachheiten der Nullstellen $[1+2+1 = 4]$ gleich dem Grad der ganz rationalen Funktion $[4]$ ist.) Einsetzen der Nullstellen in $(*)$ ergibt:

$$f(x) = a(x + 2)x^2(x - 3) = ax^2(x + 2)(x - 3) \quad (**),$$

so dass das Einsetzen des Punktes $P(-1|1)$ in $(**)$ zur Berechnung von a führt:

$$1 = f(-1) = a \cdot (-1)^2 \cdot (-1 + 2) \cdot (-1 - 3) = a \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-4) = -4a \Leftrightarrow a = -1/4.$$

Mithin lautet die gesuchte Funktion:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2(x + 2)(x - 3).$$

Wir lösen im Funktionsterm noch die Klammern auf und erhalten:

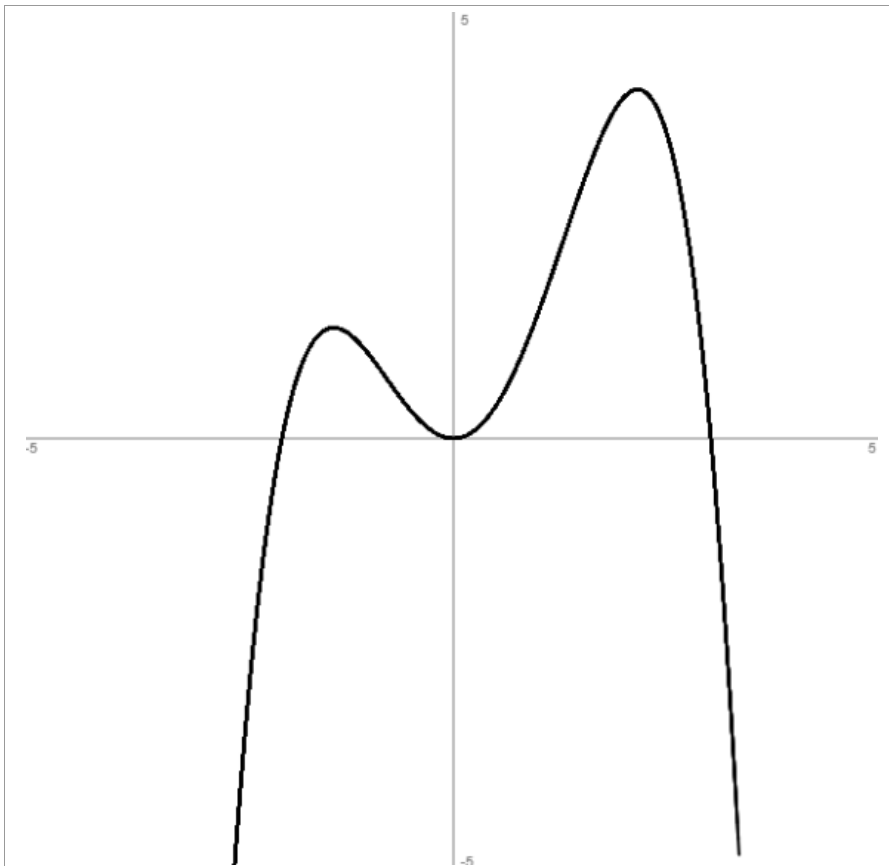
$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2(x + 2)(x - 3) = -\frac{1}{4}x^2(x^2 - 3x + 2x - 6) = -\frac{1}{4}x^2(x^2 - x - 6) = -\frac{1}{4}(x^4 - x^3 - 6x^2).$$

II. Wertetabelle, Graph:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2(x+2)(x-3) = -\frac{1}{4}(x^4 - x^3 - 6x^2)$$

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-2	0	5	-12	Nullstelle N(-2 0)
-1.4	1.2936	0.01	-4.98	Hochpunkt H(-1.4 1.29)
-0.79	0.7155	-1.41	-0.06	Wendepunkt W(-0.79 0.72)
0	0	0	3	Tiefpunkt T(-0.01 0) = Schnittpunkt S _y (0 0)
1.28	2.3108	2.97	0	Wendepunkt W(1.28 2.31)
2.14	4.0763	0.05	-7.53	Hochpunkt H(2.14 4.08)

Graph:



III. Ableitungen: Wir leiten ab und erhalten (nach Potenz-, Faktor- und Summenregel für das Ableiten von ganz rationalen Funktionen):

$$f(x) = -\frac{1}{4}(x^4 - x^3 - 6x^2).$$

$$f'(x) = -\frac{1}{4}(4x^3 - 3x^2 - 12x)$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(12x^2 - 6x - 12).$$

Die Graphen von Funktion $f(x)$ und Ableitungen $f'(x)$, $f''(x)$ sind:

