Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Eine ganz rationale Funktion f(x) 3. Grades besitzt den Wendepunkt W(1|2) und den Tiefpunkt T(3|0). Wie lautet die Funktionsgleichung?

1. Lösung: I. Ansatz: f(x) als ganz rationale Funktion 3. Grades hat mit den hier zu verwendenden Ableitungen die für die Bestimmung der Funktionskoeffizienten a, b, c, d notwendige Form:
$f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$, $f'(x) = 3ax^2+2bx+c$, $f''(x) = 6ax+2b$.

II. Eigenschaften: Aus den Tatsachen, dass f(x) den Wendepunkt W(1|2) (f(1) = 2, f''(1) = 0) und den Tiefpunkt T(3|0) (f(3) = 0, f'(3) = 0) besitzt, folgt mit dem Einsetzen der entsprechenden Werte in den jeweiligen Ansatz:
W(1|2): f(1) = a+b+c+d = 2, f''(1) = 6a+2b = 0
T(3|0): f(3) = 27a+9b+3c+d = 0, f'(3) = 27a+6b+c = 0.

III. Die so ermittelten linearen Gleichungen in a, b, c, d ergeben ein lineares Gleichungssystem:

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr} + & 1a & + & 1b & + & 1c & + & 1d & = & 2 \\ + & 6a & + & 2b & & & & & = & 0 \\ + & 27a & + & 9b & + & 3c & + & 1d & = & 0 \\ + & 27a & + & 6b & + & 1c & & & = & 0 \end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 0 \\ 27 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

1. Schritt: 1*(*2*) - 6*(*1*) / 1*(*3*) - 27*(*1*) / 1*(*4*) - 27*(*1*) /

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -6 & -6 & -12 \\ 0 & -18 & -24 & -26 & -54 \\ 0 & -21 & -26 & -27 & -54 \end{array}$$

2. Schritt: -2*(*3*) + 9*(*2*) / -4*(*4*) + 21*(*2*) /

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -6 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -22 & -18 & -36 \end{array}$$

3. Schritt: -3*(*4*) + 11*(*3*) /

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -6 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & 108 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr} + & 1a & + & 1b & + & 1c & + & 1d & = & 2 \\ & & - & 4b & - & 6c & - & 6d & = & -12 \\ & & & & - & 6c & - & 2d & = & 0 \\ & & & & & & + & 32d & = & 108 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:
d = 3.375 = 27/8, *c* = -1.125 = -9/8, *b* = -0.375 = -3/8, *a* = 0.125 = 1/8

IV. Die gesuchte Funktionsgleichung (Probe!) lautet somit: f(x) = $\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{9}{8}x + \frac{27}{8}$.

2. Lösung: I. Punktsymmetrie: Jede ganz rationale Funktion f(x) 3. Grades ist punktsymmetrisch zum Wendepunkt $W(x_W|y_W)$, den sie besitzt. D.h. die Funktion f(x) lässt sich darstellen als:
$f(x) = a(x–x_W)^3+c(x–x_W)+y_W$.

II. Wegen W(1|2) als Wendepunkt der gesuchten ganz rationalen Funktion f(x) gilt somit:
$f(x) = a(x–1)^3+c(x–1)+2$.

III. Wir leiten f(x) ab zu: $f'(x) = 3a(x–1)^2+c$ und haben auf Grund des vorgegebenen Tiefpunktes:
T(3|0): f(3) = 8a+2c + 2 = 0, f'(3) = 12a+c = 0.

IV. Daraus ergibt sich das lineare Gleichungssystem:
8a+2c = -2, 12a+c = 0
und weiter:
c = -1–4a, c = -12a,
so dass nach dem Gleichsetzungsverfahren
-1–4a = -12a ⇔ -1 = -8a ⇔ a = 1/8
folgt. Mit a = 1/8 ergibt sich: c = -12·1/8 = -3/2.

V. Die Funktionsgleichung (Probe!) lautet: f(x) = $\frac{1}{8}(x-1)^3 - \frac{3}{2}(x-1) + 2 = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{9}{8}x + \frac{27}{8}$.

VI. Wertetabelle, Graph:

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{9}{8}x + \frac{27}{8}$$

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-3	0	4.5	-3	0.75	Nullstelle N(-3|0)
-1	4	0	-1.5	0.75	Hochpunkt H(-1|4)
0	3.375	-1.125	-0.75	0.75	Schnittpunkt S_y(0|3.375)
1	2	-1.5	0	0.75	Wendepunkt W(1|2)
3	0	0	1.5	0.75	Nullstelle N(3|0) = Tiefpunkt T(3|0)