

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Eine allgemeine Parabel 2. Grades verläuft durch die Punkte $N_1(-3|0)$, $N_2(4|0)$, $P(-1|5)$. Wie lautet die Funktionsgleichung der Parabel?

1. Lösung: I. Allgemein gilt bei Bestimmungsaufgaben für Funktionen $y = f(x)$, dass die in der Aufgabenstellung angegebenen Eigenschaften der Funktion in mathematische Gleichungen übertragen werden müssen. Die Funktion wird dabei im Funktionsansatz als Funktionsterme mit noch zu bestimmenden Koeffizienten angegeben. Die mathematischen Gleichungen bilden dann ein (lineares) Gleichungssystem, das mit geeigneten mathematischen Verfahren (Gauß-Algorithmus u.a.) nach den zu bestimmenden Koeffizienten umgeformt werden muss. Einsetzen der Koeffizienten in den Funktionsansatz liefert die gesuchte Funktion. Für ganz rationale Funktionen 2. Grades ergibt sich die folgende Übersicht und Vorgehensweise:

Funktionsansatz (ganz rationale Funktion vom Grad 2, Koeffizienten a, b, c):	$f(x) = ax^2+bx+c$
Punkt $P(x_1 y_1)$ (Punktprobe für vorgegebenen Punkt):	$f(x_1) = y_1$
Punkt $Q(x_2 y_2)$ (Punktprobe für vorgegebenen Punkt):	$f(x_2) = y_2$
Punkt $R(x_3 y_3)$ (Punktprobe für vorgegebenen Punkt):	$f(x_3) = y_3$
Aufstellen eines linearen Gleichungssystems mit den noch unbekanntenen Koeffizienten a, b, c	
Lösen des linearen Gleichungssystems, bestehend aus den Gleichungen der Punktproben; Berechnung der Koeffizienten a, b, c	
Einsetzen der Koeffizienten a, b, c in den Funktionsansatz; Funktionsgleichung: $f(x) = ax^2+bx+c$	

II. Ein lineares Gleichungssystem z.B. aus drei Gleichungen mit drei Unbekannten lässt sich mit dem Gauß-Algorithmus lösen für ein lineares Gleichungssystem allgemein mit n Gleichungen und n Unbekannten der Form:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 & (2) \\ & \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n & (n) \end{aligned}$$

mit den reellen Variablen x_1, \dots, x_n , den reellen Koeffizienten a_{11}, \dots, a_{nn} und reellen Ergebnissen (rechten Seiten) b_1, \dots, b_n . In abgekürzter tabellarischer Darstellung (Matrixdarstellung) lautet das lineare Gleichungssystem in der Form der durch die rechte Seite erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right)$$

Der Gauß-Algorithmus läuft dann wie folgt ab:

Zur Lösung komplexer linearer Gleichungssysteme verwendet man den Gauß-Algorithmus, d.h. folgende Vorgehensweise: 1) Das lineare Gleichungssystem aus Gleichungen und Unbekannten wird in Matrixdarstellung umgeschrieben; eine Gleichung entspricht eine Zeile, einer Unbekannten einer Spalte in der Matrix, die rechte (Zahlen-) Seite des Gleichungssystems bildet die letzte Spalte der Matrix; die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten kann auch verschieden sein. 2) Beim Gauß-Algorithmus werden, beginnend vom Anfangstableau, Nullen unter der Hauptdiagonalen wie folgt erzeugt: 1. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 1. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 2; ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 2, so werden alle Matrixelemente in Zeile 2 mit a multipliziert, alle Matrixelemente in Zeile 1 mit b multi-

pliziert und Produkt minus Produkt als neue Matrixelemente der Zeile 2 gebildet (Vorgehensweise (*), auch unter Beachtung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen a und b). Ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*) usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 2. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 2. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 3; ist a das zweite Element in Zeile 2 und b das zweite Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*), und dies weiter für Zeile 4 usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 3. Schritt usw., bis die letzte Matrixspalte erreicht ist. Es entsteht dadurch das Endtableau des Algorithmus in Stufen- oder Dreiecksform, das auf die Lösungen des linearen Gleichungssystems hinweist gemäß: 3) Ist im Endtableau des Gauß-Algorithmus die Dreiecksgestalt (Stufenform) gegeben, so gilt für die Variable x_n der letzten Spalte mit dem dazugehörigen Matrixelement $a \neq 0$ und dem Element b der rechten Seite: $ax_n = b \Leftrightarrow x_n = b/a$. / Für die Variable x_{n-1} der vorletzten Spalte mit dem dazugehörigen Matrixelement $c \neq 0$, dem Matrixelement d und dem Element e der rechten Seite gilt: $cx_{n-1} + dx_n = e \Leftrightarrow cx_{n-1} = e - db/a \Leftrightarrow x_{n-1} = e/c - db/(ac)$ / usw., bis die Variable der ersten Matrixspalte errechnet ist. 4) Die Lösungsmenge besteht – wegen der Eindeutigkeit der Lösung – aus einem Zahlentupel, also: $L = \{(l|m|\dots|t)\}$ mit reellen Zahlen l, m, ... t.

III. Der Funktionsterm einer allgemeinen Parabel 2. Grades (Normalform) mit reellen Koeffizienten a, b, c folgt dem Ansatz:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (*)$$

IV. Einsetzen (Punktprobe) der vorgegebenen Punkte N_1, P, N_2 in den Ansatz für den Funktionsterm (*) ($x=f(x)[=y]$ -Koordinaten der Punkte) führt auf:

$$\text{Punkt } N_1(-3|0): a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c = 0$$

$$\text{Punkt } P(-1|5): a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 5$$

$$\text{Punkt } N_2(4|0): a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = 0$$

V. Es ergibt sich ein mit dem Gauß-Verfahren lösbares lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c:

Lineares Gleichungssystem:

$$+ 9a - 3b + 1c = 0$$

$$+ 1a - 1b + 1c = 5$$

$$+ 16a + 4b + 1c = 0$$

Anfangstableau:

$$9 \quad -3 \quad 1 \quad | \quad 0$$

$$1 \quad -1 \quad 1 \quad | \quad 5$$

$$16 \quad 4 \quad 1 \quad | \quad 0$$

1. Schritt: $9 \cdot (2) - 1 \cdot (1) / 9 \cdot (3) - 16 \cdot (1) /$

$$9 \quad -3 \quad 1 \quad | \quad 0$$

$$0 \quad -6 \quad 8 \quad | \quad 45$$

$$0 \quad 84 \quad -7 \quad | \quad 0$$

2. Schritt: $1 \cdot (3) + 14 \cdot (2) /$

$$9 \quad -3 \quad 1 \quad | \quad 0$$

$$0 \quad -6 \quad 8 \quad | \quad 45$$

$$0 \quad 0 \quad 105 \quad | \quad 630$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$+ 9a - 3b + 1c = 0$$

$$- 6b + 8c = 45$$

$$+ 105c = 630$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$$c = 6$$

$$b = 0.5$$

$$a = -0.5$$

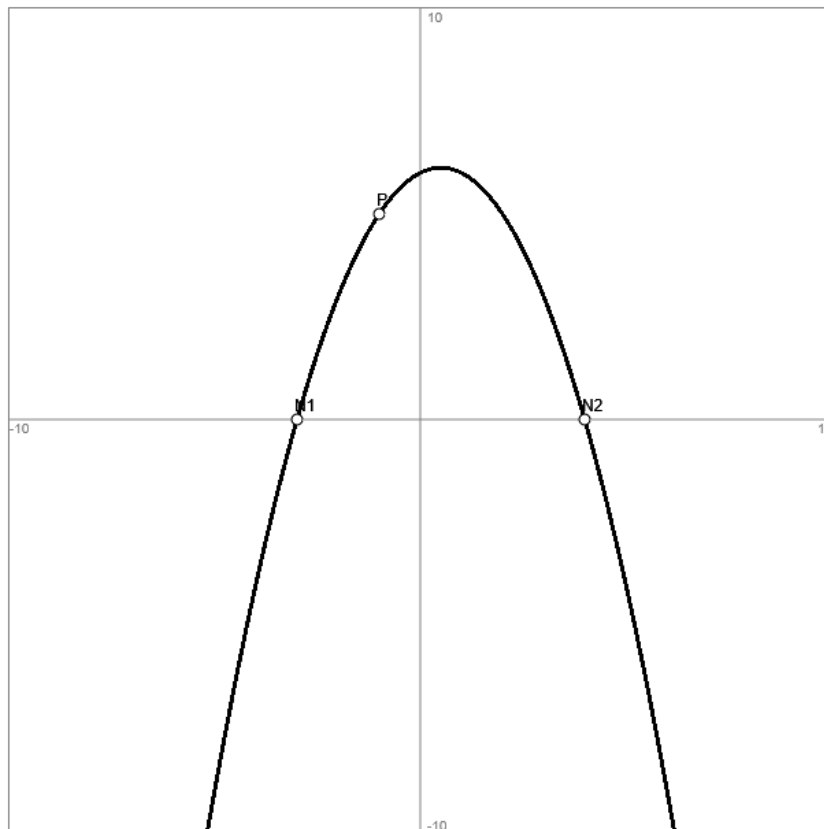
VI. Das Einsetzen der ermittelten Koeffizienten a, b, c in den Ansatz (*) ergibt den gesuchten Funktionsterm:

$$f(x) = -0.5 \cdot x^2 + 0.5 \cdot x + 6$$

und damit:

$$f(x) = -0.5x^2 + 0.5x + 6.$$

VII. Funktionsgraph: $f(x) = -0.5x^2 + 0.5x + 6$



2. Lösung: I. Ansatz: $f(x)$ als ganz rationale Funktion 2. Grades lässt sich nach der Produktform (Produkt von Linearfaktoren) aus den Nullstellen (zwei einfache Nullstellen \rightarrow Funktionsgrad 2) darstellen als:

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$$

mit zu suchendem reellen Koeffizienten a und den einfachen Nullstellen x_1 und x_2 .

II. Berechnung: Es gilt auf Grund der Nullstellen $N_1(-3|0)$, $N_2(4|0)$: $x_1=-3$ und $x_2=4$, so dass sofort folgt:

$$f(x) = a(x-(-3))(x-4) = a(x+3)(x-4).$$

Der Koeffizient a bestimmt sich aus dem Punkt $P(-1|5)$ mittels Punktprobe als:

$$f(-1) = a(-1+3)(-1-4) = a \cdot 2 \cdot (-5) = -10a = 5 \Rightarrow a = -0,5.$$

III. Die gesuchte Parabel lautet durch Einsetzen von a :

$$f(x) = -0,5(x+3)(x-4).$$

Ausmultiplizieren der Klammern führt auf die Parabelgleichung:

$$f(x) = -0,5(x+3)(x-4) = -0,5(x^2-4x+3x-12) = -0,5(x^2-x-12) = -0.5x^2 + 0.5x + 6.$$

www.michael-buhlmann.de / 01.2020 / Aufgabe 928