Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Die Kurve einer allgemeinen Parabel 2. Grades verläuft durch den Scheitelpunkt S(-2|3) und den y-Achsenschnittpunkt Punkt P(0|-1). Bestimme die Funktionsgleichung der Parabel.

Lösung: I. Allgemein gilt bei Bestimmungsaufgaben für Funktionen y = f(x), dass die in der Aufgabenstellung angegeben Eigenschaften der Funktion in mathematische Gleichungen übertragen werden müssen. Die Funktion wird dabei im Funktionsansatz als Funktionsterme mit noch zu bestimmenden Koeffizienten angegeben. Die mathematischen Gleichungen bilden dann ein (lineares) Gleichungssystem, das mit geeigneten mathematischen Verfahren nach den zu bestimmenden Koeffizienten umgeformt werden muss. Einsetzen der Koeffizienten in den Funktionsansatz liefert die gesuchte Funktion. Für ganz rationale Funktionen 2. Grades ergibt sich die folgende Übersicht und Vorgehensweise, wenn der Scheitelpunkt der Parabel gegeben ist:

Funktionsansatz (ganz rationale Funktion vom Grad 2, Koeffizient a, Scheitel $S(x_s\|y_s)$):	$f(x) = a(x-x_s)^2+y_s$
Einsetzen der Koordinaten x_s, y_s des vorgegebenen Scheitelpunkts $S(x_s\|y_s)$:	$f(x) = a(x-x_s)^2+y_s$
Punkt $P(x_1\|y_1)$ (Punktprobe für vorgegebenen Punkt):	$f(x_1) = y_1$
Aufstellen einer linearen Gleichung mit dem noch unbekannten Koeffizienten a; Lösen der linearen Gleichung durch Umstellen nach a	
Einsetzen des Koeffizienten a in den Funktionsansatz; Funktionsgleichung:	$f(x) = a(x-x_s)^2+y_s$

Scheitelform der Parabel

II. Der Funktionsterm einer allgemeinen Parabel 2. Grades in der Scheitelform mit Scheitelpunkt $S(x_s|y_s)$ und mit reellem Koeffizienten a folgt dem Ansatz:

$f(x) = a(x-x_s)^2 + y_s$ (*).

III. Einsetzen des vorgegebenen Scheitelpunkts S(-2|3) in den Ansatz (*) ergibt bei $x_s = -2$ und $y_s = 3$:

$f(x) = a(x-(-2))^2 + 3 = a(x+2)^2 + 3$ (**).

IV. Einsetzen (Punktprobe) des vorgegebenen Punkts P in den Funktionsterm (**) (x-f(x)[=y]-Koordinaten des Punkts) führt auf:

Punkt P(0|-1): $-1 = a(0+2)^2 + 3 \Rightarrow a = -1$.

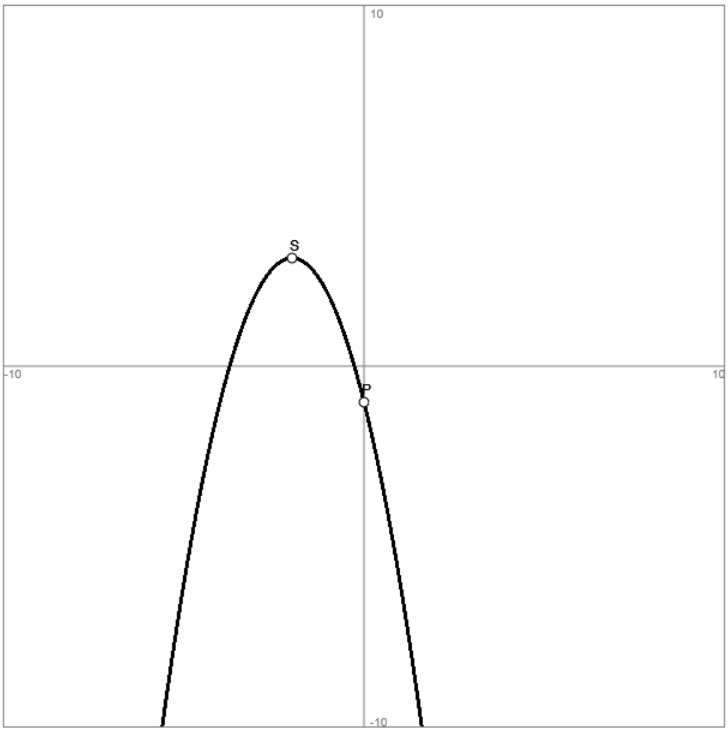
V. Es ergibt sich durch Einsetzen des errechneten Koeffizienten a in (**) die Scheitelform der allgemeinen Parabel:

$f(x) = -(x+2)^2 + 3$ (***).

VI. Unter Verwendung der binomischen Formeln beim Auflösen der vorhandenen Klammer in der Scheitelform (***) ergibt sich die Normalform der allgemeinen Parabel mit den Koeffizienten a= -1, b = -4, c = -1:

$f(x) = -x^2 - 4x - 1$.

VII. Funktionsgraph: $f(x) = -x^2 - 4x - 1$ ▶



www.michael-buhlmann.de / 01.2020 / Aufgabe 966