Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Bestimmungsaufgabe

Aufgabe: Die Kurve einer allgemeinen Parabel 2. Grades verläuft durch die Punkte P(-2|11), Q(0|-7), R(3|-4). Wie lautet die Funktionsgleichung der Parabel?

Lösung: I. Allgemein gilt bei Bestimmungsaufgaben für Funktionen y = f(x), dass die in der Aufgabenstellung angegeben Eigenschaften der Funktion in mathematische Gleichungen übertragen werden müssen. Die Funktion wird dabei im Funktionsansatz als Funktionsterme mit noch zu bestimmenden Koeffizienten angegeben. Die mathematischen Gleichungen bilden dann ein (lineares) Gleichungssystem, das mit geeigneten mathematischen Verfahren nach den zu bestimmenden Koeffizienten umgeformt werden muss. Einsetzen der Koeffizienten in den Funktionsansatz liefert die gesuchte Funktion. Für ganz rationale Funktionen 2. Grades ergibt sich die folgende Übersicht und Vorgehensweise:

Funktionsansatz (ganz rationale Funktion vom Grad 2, Koeffizienten a, b, c):	$f(x) = ax^2+bx+c$
Punkt $P(x_1\|y_1)$ (Punktprobe für vorgegebenen Punkt): Punkt $Q(x_2\|y_2)$ (Punktprobe für vorgegebenen Punkt): Punkt $R(x_3\|y_3)$ (Punktprobe für vorgegebenen Punkt):	$f(x_1) = y_1$ $f(x_2) = y_2$ $f(x_3) = y_3$
Aufstellen eines linearen Gleichungssystems mit den noch unbekannten Koeffizienten a, b, c	
Lösen des linearen Gleichungssystems, bestehend aus den Gleichungen der Punktproben; Berechnung der Koeffizienten a, b, c	
Einsetzen der Koeffizienten a, b, c in den Funktionsansatz; Funktionsgleichung:	$f(x) = ax^2+bx+c$

Normalform der Parabel

II. Ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten habe die Form:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \qquad (1)$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \qquad (2)$$

mit den reellen Variablen x_1, x_2, den reellen Koeffizienten a_{11}, … a_{22} und reellen Ergebnissen (rechten Seiten) b_1, b_2. Das lineare Gleichungssystem hat dann entweder keine Lösung, eine Lösung oder unendlich viele Lösungen. Zur Bestimmung der Variablen x_1 und x_2 lässt sich das Additionsverfahren durchführen: Hier führt die Addition des Vielfachen einer Gleichung zu der anderen zur Elimination einer Variablen. Die zweite Variable kann bestimmt werden, Einsetzen in eine der Ursprungsgleichungen führt zur Bestimmung der anderen Variablen.

III. Der Funktionsterm einer allgemeinen Parabel 2. Grades (Normalform) mit reellen Koeffizienten a, b, c folgt dem Ansatz:

$f(x) = ax^2 + bx + c$ (*).

IV. Einsetzen (Punktprobe) der vorgegebenen Punkte P, Q, R in den Ansatz für den Funktionsterm (*) (x-f(x)[=y]-Koordinaten der Punkte) führt auf:

Punkt P(-2|11): $a\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) + c = 11$
Punkt Q(0|-7): $a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = -7$
Punkt R(3|-4): $a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c = -4$

V. Es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c:

(I) $+ 4a - 2b + 1c = 11$
(II) $+ 1c = -7$
(III) $+ 9a + 3b + 1c = -4$

Aus Gleichung (II) folgt sofort: c = -7, so dass sich die Gleichungen (I) und (II) ergeben als:

$4a – 2b – 7 = 11 \Leftrightarrow 4a – 2b = 18$ (1)
$9a + 3b – 7 = -4 \Leftrightarrow 9a + 3b = 3$ (2).

Das lineare Gleichungssystem mit den 2 Gleichungen (1), (2) und den 2 Unbekannten a, b wird noch durch Division von Gleichung (1) durch 2 und Gleichung (2) durch 3 umgeformt zu:

$2a – b = 9$ (1‘)
$3a + b = 1$ (2‘),

so dass die Addition der beiden Gleichungen (1‘) und (2‘) auf:

$5a = 10 \Leftrightarrow a = 2$

führt. Einsetzen von a = 2 z.B. in die Gleichung (2‘) ergibt:

$3\cdot 2 + b = 1 \Leftrightarrow 6 + b = 1 \Leftrightarrow b = -5$.

Die Koeffizienten der gesuchten Funktionsgleichung lauten damit:

a = 2, b = -5, c = -7.

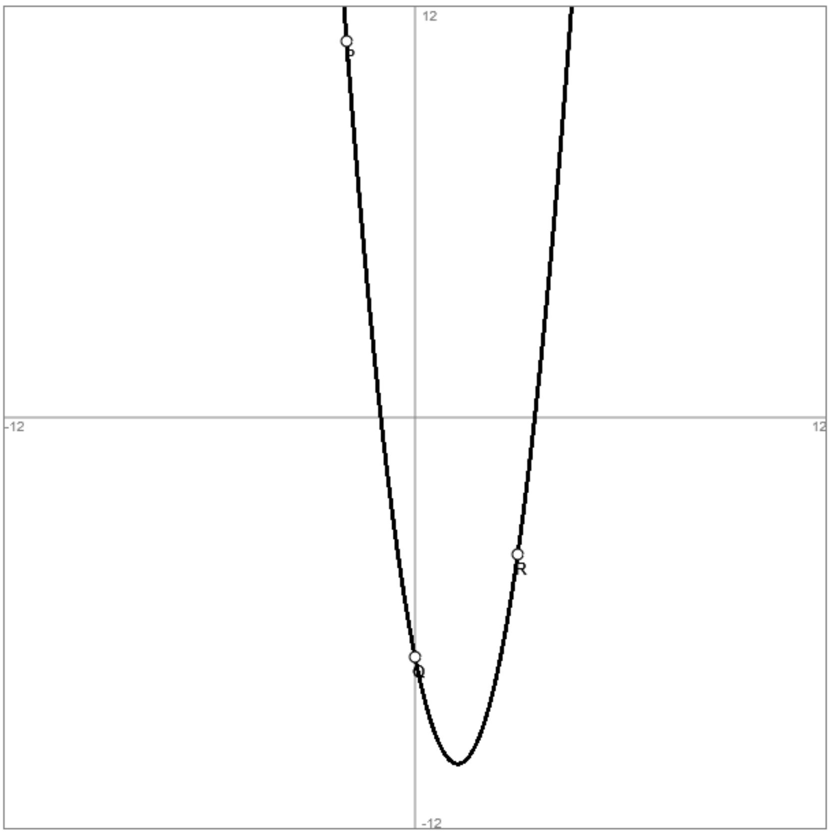
VI. Das Einsetzen der ermittelten Koeffizienten a, b, c in den Ansatz (*) ergibt den gesuchten Funktionsterm:

$f(x) = 2\cdot x^2 + (-5)\cdot x + (-7)$

und damit:

$f(x) = 2x^2 - 5x - 7$.

VII. Funktionsgraph: $f(x) = 2x^2 - 5x - 7$



www.michael-buhlmann.de / 01.2020 / Aufgabe 970